

PROYECTO FIN DE CARRERA:  
MOTORES DE EFECTO HALL DE ALTO IMPULSO  
ESPECÍFICO

Autor: Diego Escobar Antón

Tutor: Eduardo Ahedo Galilea

E.T.S.I. Aeronáuticos, Universidad Politécnica de Madrid

27 de Septiembre de 2005



# Índice general

<b>1. Revisión de prototipos</b>	<b>11</b>
1.1. Propulsión eléctrica. . . . .	11
1.2. Motores de efecto Hall. Revisión histórica. . . . .	12
1.3. Motores de efecto Hall. Funcionamiento. . . . .	13
1.4. Motores de efecto Hall de alto impulso específico. . . . .	15
1.4.1. Comportamiento a alto potencial de descarga. . . . .	17
1.4.2. Motores duales. . . . .	18
1.4.3. Motores de doble etapa. . . . .	19
1.4.4. Problemas tecnológicos. . . . .	20
<b>2. Modelización numérica:</b>	
<b>Ecuaciones generales</b>	<b>21</b>
2.1. Teoría cinética . . . . .	22
2.2. Conceptos básicos de la aproximación fluida . . . . .	27
2.3. Conceptos básicos de los métodos de partículas . . . . .	30
<b>3. HPHall-2</b>	<b>37</b>
3.1. Introducción . . . . .	37
3.2. Objetivos del proyecto . . . . .	39
3.3. Modelo 2D . . . . .	40
3.4. Campo magnético . . . . .	42
3.5. Cuasineutralidad . . . . .	44

<b>4. Método de partículas en HPHall-2</b>	<b>47</b>
4.1. Malla uniforme en el plano computacional . . . . .	48
4.2. Movimiento de las partículas . . . . .	49
4.2.1. Geometría axilsimétrica . . . . .	51
4.2.2. Fuerzas para el movimiento de los iones y de los neutros . . . . .	53
4.2.3. Determinación de $\xi$ y $\eta$ en función de $z$ y $r$ . . . . .	54
4.3. Proceso de pesado en malla no uniforme . . . . .	55
4.4. Colisiones inelásticas: ionización y recombinación . . . . .	60
4.4.1. Análisis de la ionización: producción de iones . . . . .	61
4.4.2. Análisis de la recombinación . . . . .	64
4.4.3. Influencia sobre las macropartículas . . . . .	65
4.5. Colisiones elásticas . . . . .	69
4.5.1. Colisiones de pequeño ángulo. Modelo fluido de colisiones . . . . .	70
4.5.2. Colisiones de gran ángulo. Colisiones de intercambio de carga . . . . .	71
4.6. Inyección de masa . . . . .	73
4.7. Condiciones de contorno para las partículas . . . . .	74
4.7.1. Tipos de contorno . . . . .	74
4.7.2. Inyector. . . . .	75
4.7.3. Eje de simetría. . . . .	75
4.7.4. Vacío. . . . .	75
4.7.5. Paredes cerámicas y metálicas. . . . .	76
4.8. Corrección del pesado en los límites de la malla. . . . .	78
4.9. Forzado de la condición de Bohm. . . . .	79
<b>5. Modelo fluido de electrones</b>	<b>81</b>
5.1. Introducción . . . . .	81
5.2. Sistemas de referencia . . . . .	83
5.3. Ecuaciones macroscópicas de conservación. . . . .	86
5.4. Campo eléctrico . . . . .	87

5.5. Ecuación de continuidad . . . . .	88
5.6. Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento . . . . .	88
5.6.1. Colisiones elásticas electrón-neutro . . . . .	91
5.6.2. Movimiento a lo largo de las líneas de campo magnético: equilibrio de Maxwell-Boltzmann . . . . .	92
5.6.3. Movimiento perpendicular al campo magnético: ley de Ohm . . . . .	93
5.6.4. Conductividad perpendicular al campo magnético: difusión anómala y conductividad cercana a la pared . . . . .	95
5.7. Ecuación de conservación de la energía total. . . . .	98
5.7.1. Conducción térmica para los electrones . . . . .	99
5.7.2. Efecto de las colisiones . . . . .	101
5.7.3. Ecuación de conservación de la energía total resultante . . . . .	103
5.8. Ecuaciones del modelo fluido de electrones para HPHall . . . . .	104
5.8.1. Ecuaciones unidimensionales equivalentes . . . . .	104
5.8.2. Comparación con ecuaciones unidimensionales . . . . .	111
5.9. Condiciones de contorno. . . . .	114
5.10. Colisionalidad de pared. . . . .	115
5.11. Métodos de resolución de las ecuaciones de electrones. . . . .	117
5.11.1. Malla para resolución de las ecuaciones de electrones. . . . .	117
5.11.2. Cálculo de la temperatura de electrones. . . . .	118
5.11.3. Estabilidad numérica en el cálculo del perfil de temperatura. . . . .	122
5.11.4. Cálculo del potencial termalizado y de la intensidad electrónica. . . . .	125
5.12. Acoplamiento métodos PIC/fluido. . . . .	126
5.13. Ventajas e inconvenientes del nuevo modelo fluido. . . . .	128
<b>6. Interacción plasma-pared.</b>	<b>129</b>
6.1. Introducción . . . . .	129
6.2. Análisis del ánodo. . . . .	131
6.3. Interacción plasma-pared en la región cercana al ánodo en HPHall. . . . .	138

6.4. Análisis de las paredes cerámicas. . . . .	140
6.5. Análisis de electrodos activos. . . . .	152
<b>7. Análisis de actuaciones</b>	<b>155</b>
7.1. Introducción . . . . .	155
7.2. Cálculo de actuaciones en HPHall . . . . .	156
7.2.1. Definición de empuje e impulso específico . . . . .	156
7.2.2. Potencia eléctrica necesaria. . . . .	160
7.2.3. Potencia del chorro y balances de energía . . . . .	163
7.2.4. Eficiencia total y eficiencias parciales . . . . .	168
7.3. Chequeo de balances de masa y energía . . . . .	172
7.4. Resultados para motor convencional SPT-100 . . . . .	175
7.4.1. Resumen de parámetros de funcionamiento según HPHall . . . . .	176
7.4.2. Mapas bidimensionales . . . . .	178
7.4.3. Resultados unidimensionales . . . . .	183
7.5. Soluciones estacionarias. Estudio de oscilaciones. . . . .	187
7.6. Influencia de la presencia de iones dobles para el motor SPT-100. . . . .	190
7.7. Influencia del potencial de descarga y del campo magnético. . . . .	192
7.7.1. Comparación de resultados con/sin ionización múltiple. . . . .	201
7.8. Operación dual a potencia constante. . . . .	202
7.9. Motores de doble etapa . . . . .	207
7.10. Erosión y cargas térmicas en paredes. . . . .	212
7.11. Comparación con prototipos . . . . .	214
<b>8. Conclusiones</b>	<b>215</b>
8.1. Objetivos alcanzados . . . . .	216
8.2. Programa de futuras mejoras del código . . . . .	217

# Índice de figuras

1.1. Motor PPS-1350, motor primario de SMART-1. . . . .	14
1.2. Comparación de motores de efecto Hall y motores iónicos en términos de eficiencia e impulso específico . . . . .	16
1.3. Regímenes de funcionamiento en motores duales . . . . .	18
2.1. Comparación de las distintas funciones de pesado en una malla unidimensional. (a) Pesado de orden 0. (b) Pesado de orden 1. . . . .	33
3.1. Diversos tipos de mallas utilizados en HPHall. . . . .	41
4.1. Malla no uniforme en el plano $(z, r)$ y malla uniforme correspondiente en el plano computacional $(\xi, \eta)$ . . . . .	48
4.2. Esquema numérico ‘leapfrog’ empleado para resolver el movimiento de las partículas pesadas (iones y neutros). . . . .	50
4.3. Esquema numérico para el movimiento de las partículas en un sistema de referencia cilíndrico. Los vectores unitarios se representan como $\hat{u}$ . El subíndice 0 es para la posición inicial de la partícula y el subíndice 1 para la posición final. En esta figura los vectores $\hat{u}_z$ apuntan hacia el lector. . . . .	51
4.4. (a) función de pesado bilineal y (b) Situación de la partícula con ‘zona de pesado’. . . . .	56
4.5. Diferentes dominios de integración para obtener $\Delta V_{jk}$ : (a) nodo interior, (b) nodo en el borde, y (c) nodo en una esquina. . . . .	57

4.6. (a) Sección efectiva de la ionización ( $\sigma_i$ ) frente a la energía del electrón ( $\epsilon$ ). (b) Función $\zeta(T_e)$ que describe la dependencia de $\dot{n}_i$ con la temperatura de electrones. . . . .	62
4.7. Distintos tipos de contorno posibles desde el punto de vista de las partículas.	74
4.8. Partícula cruzando el eje de simetría ( $r = 0$ ) y su partícula 'reflejo'. . . . .	75
5.1. Energía adimensionalizada necesaria para la ionización ( $\varphi' = \varphi/\epsilon_i$ ) frente la temperatura de electrones adimensionalizada ( $\theta = kT_e/\epsilon_i$ ). . . . .	103
5.2. Ejemplo de malla magnética . . . . .	117
5.3. Diagrama de flujo del programa. . . . .	127
6.1. Esquema de flujos y regiones en la vaina de ánodo . . . . .	132
6.2. Funciones de distribución a conectar en la transición a vaina de ánodo . . . .	133
6.3. Variables adimensionales características del ánodo en función de la caída de potencial en vaina: número de Mach de electrones, flujo de carga electrónica , flujo de energía total y flujo de calor hacia el ánodo . . . . .	137
6.4. Esquema de los flujos en la vaina de una pared cerámica. El punto Q representa la transición a vaina y el punto W representa la pared. El subíndice p denota electrones primarios (incidentes), el subíndice s denota electrones secundarios (emitidos) y el subíndice e electrones en la región cuasineutra . . . . .	141
6.5. Variables para el límite de saturación de carga para el caso sin ionización múltiple	146
6.6. Parámetro $\delta_W$ para el límite de saturación de carga en el caso sónico en función de la carga equivalente . . . . .	148
6.7. Resultados adimensionales para el modelo de vaina de cerámico sin iones dobles	150
6.8. Resultados adimensionales para el modelo de electrodo activo sin iones dobles	153
7.1. Flujo másico de iones, neutros y total a lo largo del canal. . . . .	172
7.2. Intensidad de campo magnético utilizado para la simulación del motor SPT-100	175
7.3. Mapas bidimensionales. . . . .	181
7.4. Mapas bidimensionales. . . . .	182



7.5. Resultados sobre las paredes en el interior del canal, el subíndice 1 indica pared interior y el subíndice 2 pared exterior. . . . .	184
7.6. Resultados en sección $r=0.0425\text{m}$ y dos secciones $z=0.015\text{m}$ y $z=0.025\text{m}$ . . . .	186
7.7. Gráficos temporales de intensidad de descarga y empuje. . . . .	187
7.8. Gráfico temporal de la variación de la temperatura a lo largo de tiempo en el interior del canal en función de la coordenada magnética $\lambda$ . . . . .	188
7.9. Secuencia de una oscilación de alta frecuencia en la densidad $n_e(m^{-3})$ . . . . .	189
7.10. Densidades de iones simples y dobles (izquierda) y carga equivalente y temperatura de electrones (derecha) en la línea media del canal ( $r=42.5\text{ mm}$ ). . . . .	190
7.11. Resultados de la variación paramétrica del potencial de descarga . . . . .	193
7.12. Temperatura de electrones $T_e(eV)$ , potencial eléctrico $\phi(V)$ , densidad de electrones $n_e(m^{-3})$ y carga equivalente $q$ en la línea media del canal ( $r=42.5\text{ mm}$ ) para distintos potenciales de descarga ( $V_d = 300V, 600V, 750V$ ). . . . .	195
7.13. Densidad de electrones $n_e(m^{-3})$ y potencial eléctrico $\phi(V)$ en la transición a vaina de ánodo ( $z = 0\text{ mm}$ ) para distintos potenciales de descarga ( $V_d = 300V, 600V, 750V$ ). . . . .	196
7.14. Flujo másico de iones a lo largo del canal para distintos potenciales de descarga ( $V_d = 300V, 600V, 750V$ ). . . . .	197
7.15. Flujo de energía de electrones a la pared exterior $q_{We}(W/m^2)$ , flujo de energía de iones a la pared exterior $q_{Wi}(W/m^2)$ , densidad de electrones en la transición a vaina de la pared exterior $n_e(m^{-3})$ y corriente de iones a la pared exterior $j_{Wi}(A/m^2)$ para distintos potenciales de descarga ( $V_d = 300V, 600V, 750V$ ). . . . .	198
7.16. Densidad de electrones $n_e(m^{-3})$ (columna izquierda) y corriente axial de iones $j_{iz}(A/m^2)$ (columna derecha) en todo el canal para distintos potenciales de descarga ( $V_d = 300V, 600V, 750V$ ). . . . .	200
7.17. Influencia de la ionización secundaria sobre la variación paramétrica del potencial de descarga . . . . .	201
7.18. Resultados de la variación paramétrica del gasto másico manteniendo constante la potencia del motor en $P_d = 2\text{kW}$ . . . . .	203

7.19. Temperatura de electrones $T_e(eV)$ , potencial eléctrico $\phi(V)$ , densidad de electrones $n_e(m^{-3})$ y carga equivalente $q$ en la línea media del canal ( $r=42.5$ mm) para distintos gastos máxicos a igualdad de potencia ( $\dot{m}_a = 3$ mg/s, 5 mg/s y 6 mg/s). . . . .	205
7.20. Flujo de energía de electrones a la pared exterior $q_{We}(W/m^2)$ , flujo de energía de iones a la pared exterior $q_{Wi}(W/m^2)$ , densidad de electrones en la transición a vaina de la pared exterior $n_e(m^{-3})$ y corriente de iones a la pared exterior $j_{Wi}(A/m^2)$ para distintos gastos máxicos a igualdad de potencia ( $\dot{m}_a = 3$ mg/s, 5 mg/s y 6 mg/s). . . . .	206
7.21. Temperatura de electrones $T_e(eV)$ , densidad de electrones $n_e(m^{-3})$ , potencial eléctrico $\phi(V)$ y tasa de ionización total $\dot{n}_i(m^{-3}s^{-1})$ en la línea media del canal ( $r=42.5$ mm) para distintos valores de la intensidad por el electrodo intermedio situado en la pared lateral exterior a 21mm del ánodo y de 2mm de anchura( $\dot{m}_a = 0.26A$ , 0.79A y 1.37A). Como referencia se muestra el caso sin electrodo intermedio. . . . .	209
7.22. Temperatura de electrones $T_e(eV)$ , potencial eléctrico $\phi(V)$ , densidad de electrones $n_e(m^{-3})$ y tasa de ionización total $\dot{n}_i(m^{-3}s^{-1})$ en la línea media del canal ( $r=42.5$ mm) para distintas posiciones del electrodo y valores de la intensidad por el electrodo intermedio semejantes. . . . .	210
7.23. Reproducción del proceso de sputtering. . . . .	212

# Índice de cuadros

4.1. Constantes para el modelo de ionización de Drawin con una distribución de electrones maxwelliana. . . . .	61
5.1. Constantes para ajustar el modelo de Dugan para las pérdidas energéticas de ionización. . . . .	102
7.1. Valores característicos del motor SPT-100. . . . .	175
7.2. Valores obtenidos con HPHall para el motor SPT-100. . . . .	176
7.3. Parámetros de operación variando la intensidad por el electrodo . . . . .	209
7.4. Parámetros de operación variando la posición del electrodo . . . . .	211



# Capítulo 1

## Revisión de prototipos

### 1.1. Propulsión eléctrica.

La propulsión eléctrica hoy en día es una clara alternativa a la tradicional propulsión química para satélites y demás vehículos espaciales. La razón fundamental para ello es que reducen la cantidad de combustible necesario para una cierta misión con lo que la masa para la carga útil puede aumentar o bien la masa total puede reducirse con la consecuente reducción del coste de lanzamiento. Además, debido a que los motores de propulsión eléctrica suelen caracterizarse por dar un empuje pequeño comparado con la propulsión química pero durante un tiempo mucho mayor, esto les confiere una flexibilidad muy grande a la hora de su operación.

Dentro de la propulsión eléctrica actual los llamados motores de efecto Hall o de propulsión por plasma constituyen una de las opciones más interesantes. De ahí que ya se hayan utilizado con éxito en misiones científicas como la SMART-1 de la ESA a la Luna o se esté estudiando su implantación en satélites geoestacionarios para funciones de transferencia a órbita geoestacionaria y de corrección de órbita.

La principal razón del éxito de los motores Hall es que sus características de funcionamiento los hacen muy adecuados para ese tipo de funciones. En particular, estos motores vienen caracterizados por un impulso específico del orden de 1600 s., rango en el cual ninguna otra tecnología puede operar eficientemente.

## 1.2. Motores de efecto Hall. Revisión histórica.

Como la mayor parte de la propulsión eléctrica, los motores de efecto Hall surgen en los años sesenta. Actualmente, no está claro quién fue el primero que propuso la utilización de dispositivos de este tipo para propulsión espacial y lo más probable es que surgiese simultáneamente en E.E.U.U y la U.R.S.S.

Sin embargo, graves problemas de fuertes oscilaciones presentes en ellos y la creencia de que los motores de arco eléctrico podrían llegar a realizar eficientemente misiones similares llevaron a los científicos estadounidenses a desechar los motores Hall. Por otro lado, la creencia de que la disponibilidad de energía en el satélite sería grande rápidamente y el mayor estado de desarrollo de los motores iónicos contribuyeron a esta decisión.

Por contra, los científicos rusos continuaron su desarrollo e implantación en satélites en la década de los setenta y ochenta mientras que en Occidente muy poco se sabía acerca del avanzado estado de desarrollo de estos motores.

Tras la caída de la antigua Unión Soviética el estado de madurez de esta tecnología fue conocido en los países occidentales y un incipiente interés por ellos ha existido desde entonces en los E.E.U.U. y Europa. Incluso se han establecido programas de colaboración entre las principales empresas encargadas del desarrollo de estos motores en Europa, E.E.U.U y Rusia (Fakel en Rusia, Snecma en Europa...).

Fruto de esta colaboración es el motor PPS-1350 diseñado y fabricado por Snecma y de características similares al SPT-100 de Fakel. Este motor ya ha sido cualificado según los estándares occidentales y utilizado con éxito en la misión SMART-1 de la ESA a la Luna. Este sonda fue puesta en órbita con éxito en Septiembre de 2003 y tras un lento, pero muy eficiente viaje llegó su órbita final alrededor de la Luna a principios del año 2005.

Hoy en día existen muchos programas de desarrollo de nuevos motores de efecto Hall. En particular, los motores de alto impulso específico (hasta 3000 s) han adquirido un especial interés pues permitirían aumentar el rango de misiones en las cuales estos motores pueden ser utilizados.

### 1.3. Motores de efecto Hall. Funcionamiento.

Se pueden distinguir dos versiones de motores Hall: uno llamado Stationary Plasma Thruster (SPT) de paredes laterales cerámicas y otro de paredes metálicas denominado usualmente TAL. Los motores del tipo SPT y sus diversas variantes occidentales se basan en la utilización de energía eléctrica procedente de una fuente externa, normalmente paneles solares, para la generación de un campo eléctrico que provoca la aceleración de un chorro de iones. Este chorro de iones ha sido formado tras la ionización de un propulsante, normalmente Xenón, introducido por el inyector situado al fondo del canal del motor. Geométricamente el motor es una cavidad anular con simetría cilíndrica en el cual se producen los dos fenómenos anteriores, ionización y aceleración. Para el mantenimiento del proceso de ionización es necesaria la existencia de un flujo de electrones contrario al del propulsante de forma que se introduce por el cátodo, en el exterior del motor, y es recogido por el ánodo, junto al inyector. Además, para aumentar la eficiencia del proceso de ionización se utiliza un campo magnético radial que obliga a los electrones a describir trayectorias helicoidales aumentando así su tiempo de residencia en la zona de ionización.

Por tanto, las partes fundamentales del motor, según se muestra en la figura (1.1), son:

- circuito magnético.- encargado de crear un campo magnético fundamentalmente radial.
- cátodo.- emite la corriente de electrones encargada de ionizar el propulsante, pero así mismo emite una corriente de electrones que tiene por objeto neutralizar el chorro exterior y evitar así que el vehículo quede cargado eléctricamente.
- ánodo.- recoge los electrones generados por la ionización y los introducidos por el cátodo.
- inyector.- es a través de donde se introduce el propulsante.
- paredes cerámicas.- su misión es la de aislar el canal permitiendo los procesos de ionización y aceleración. Normalmente son una mezcla de materiales como el nitruro de boro (BN) y de dióxido de silicio ( $\text{SiO}_2$ ) llamada a veces BoroSil. El mayor problema asociado a ellas es la erosión producida por el impacto de iones de alta energía en la pared (fenómeno de sputtering).

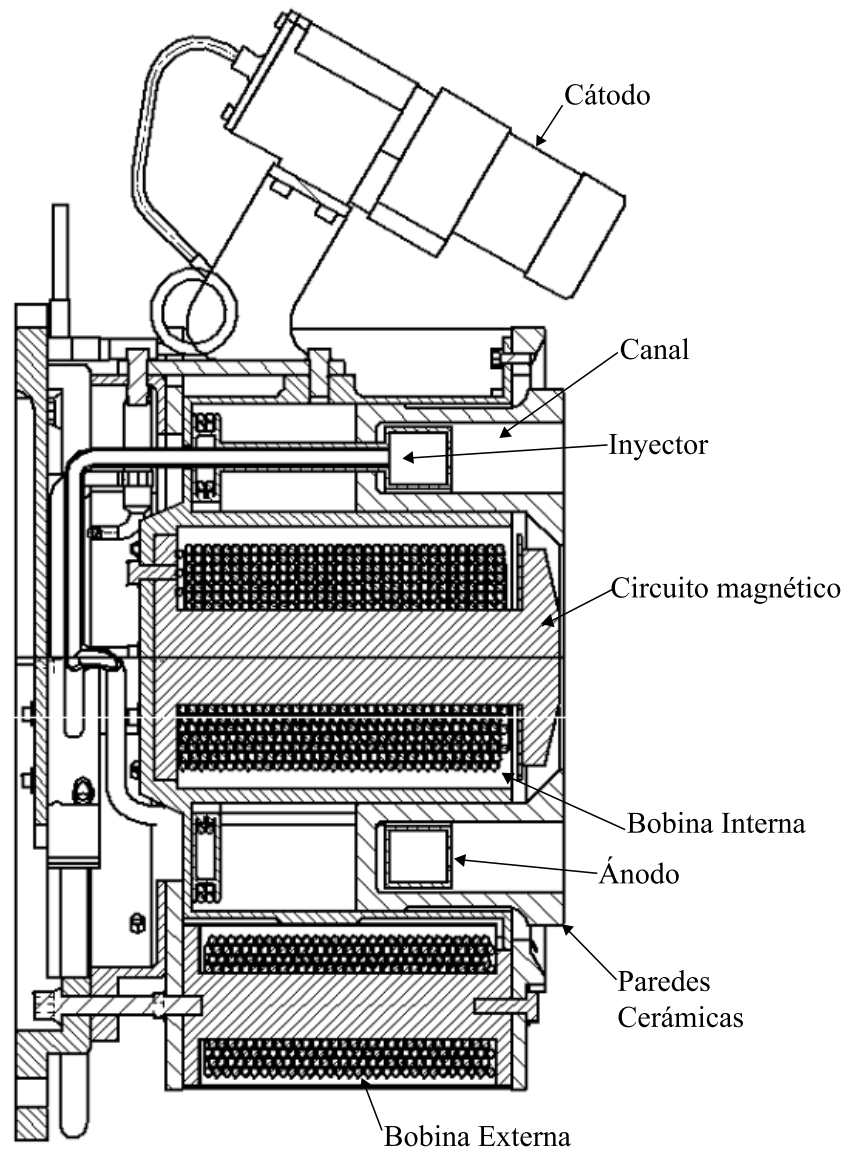


Figura 1.1: Motor PPS-1350, motor primario de SMART-1.



## 1.4. Motores de efecto Hall de alto impulso específico.

El impulso específico es una de las variables más importantes que caracterizan un sistema de propulsión espacial pues indica cómo de eficientemente se está utilizando el propulsante para la generación de empuje. Es más, este valor acaba determinando para qué misiones son más adecuados cada uno de los diversos tipos de propulsión eléctrica o química.

Por definición se tiene que en un caso estacionario el impulso específico es:

$$I_{sp} = \frac{F}{g_0 \dot{m}}$$

donde  $F$  es el empuje,  $g_0$  es la gravedad y  $\dot{m}$  es el gasto másico o cantidad de propulsante utilizada por unidad de tiempo.

En el caso de los motores Hall más convencionales este parámetro adquiere valores del orden de 1600s convirtiéndolos en sistemas de propulsión adecuados para misiones de station-keeping o incluso para misiones a la Luna (SMART-1 de la ESA).

Por contra, para misiones interplanetarias ese valor de impulso específico resulta ser demasiado bajo provocando que el peso del propulsante necesario para la misión sea excesivo en comparación con otros tipos de propulsión, especialmente los motores iónicos que suelen tener impulsos específicos entre 3000s y 5000s.

Por ello hoy en día se está poniendo especial interés en aumentar el rango de impulso específico de los motores Hall y así hacerlos competitivos frente a los motores iónicos. La manera más sencilla de conseguir esto consiste en aumentar el potencial de descarga pues en primera aproximación el empuje se puede suponer proporcional al gasto másico y a la velocidad de los iones en el chorro que va como la raíz cuadrada del potencial de descarga. Obviamente esto implica que las potencias necesarias también aumenten a no ser que el gasto másico se reduzca. Es por ello que actualmente se han diseñado o están en diseño diversos motores con potenciales de descarga superiores a los 500V, y llegando incluso a alcanzar los 1000V en algunos puntos de funcionamiento frente a un valor normal de 300V.

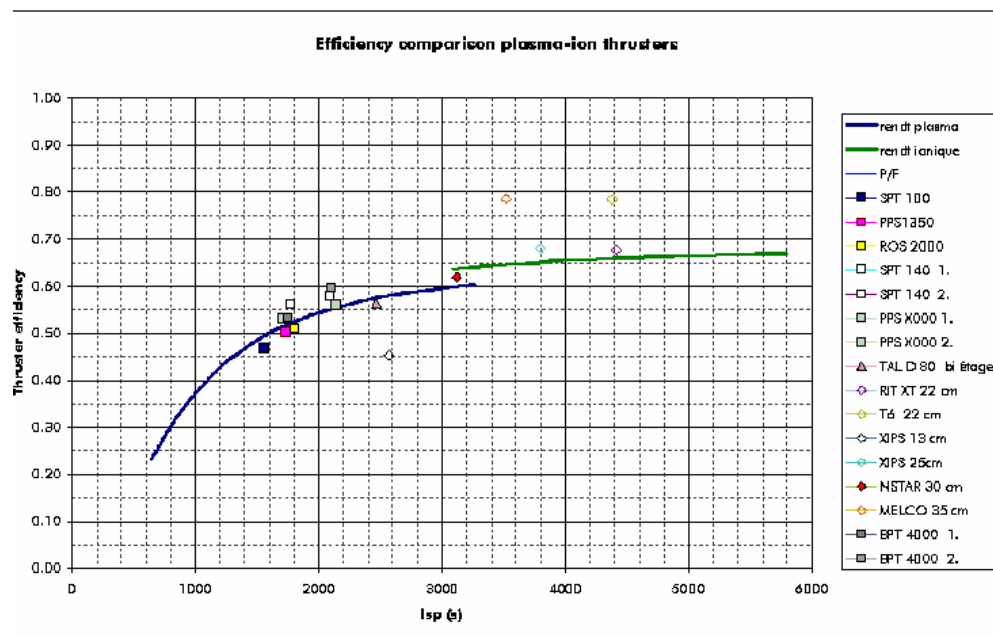


Figura 1.2: Comparación de motores de efecto Hall y motores iónicos en términos de eficiencia e impulso específico

En la figura (1.2) se muestra una comparativa de diversos motores Hall e iónicos en términos de eficiencia e impulso específico nominales. Por un lado se observa que los motores iónicos son más eficientes y que su impulso específico es también mayor, lo cual es debido a su mayor potencial de descarga. Por otro lado, los motores Hall convencionales se sitúan en un rango de impulso específico en el cual la operación eficiente de los motores iónicos no es posible, de ahí su uso.

A la vista de este gráfico parece irracional intentar utilizar motores Hall con un impulso específico de 2500-3000s pues su eficiencia es claramente menor. Sin embargo, la relación potencia-empuje para los motores iónicos es del orden de un 50 % superior a la de los motores de efecto Hall ( 30 W/mN frente a 20 W/mN) y como consecuencia de ello, los paneles solares a utilizar son de un peso elevado. Así, los motores Hall, a pesar de ser menos eficientes, pueden compensar ese hecho gracias a un menor peso del sistema en conjunto. En cualquier caso, para que el peso de propulsante no sea excesivo el impulso específico debe ser mayor de lo habitual en motores Hall.

#### 1.4.1. Comportamiento a alto potencial de descarga.

A la vista del gráfico (1.2) se observa que el valor esperable de eficiencia a alto impulso específico, o lo que es lo mismo a alto potencial de descarga, se incrementa de forma continua por encima del 60 %. Sin embargo, experimentalmente se comprueba que esto no es así, sino que en realidad existe un máximo de eficiencia en el entorno de los 600V de potencial de descarga, valor a partir del cual hay pérdidas en la eficiencia (véase por ejemplo [59] o [44]). Múltiples razones se han dado para la existencia de este comportamiento entre las cuales cabe señalar dos:

- aumento de la ionización múltiple provocando que el proceso de ionización sea menos eficiente y que el chorro presente dos especies de partículas (iones simples y dobles) de velocidades muy diferentes. Esto último se sabe que tiende a reducir el empuje obtenido debido a la diferencia de las velocidades.
- utilización de campos magnéticos optimizados para potenciales de descarga bajos y que no permiten un funcionamiento eficiente a altos potenciales.

En la referencia [59] se analiza experimentalmente la influencia de ambos efectos llegando a la conclusión de que parece ser el segundo motivo el correcto. A pesar de ello conviene analizar las variaciones sufridas en el funcionamiento del motor con respecto a los potenciales de descarga habituales para que ello sea así.

En este proyecto se acude a la modelización numérica para intentar dar respuesta a esta necesidad para lo cual son necesarios dos aspectos fundamentales:

- el proceso de ionización doble debe ser tenido en cuenta de una forma rigurosa.
- el modelo debe estar preparado para aceptar distintos tipos de topología del campo magnético.

### 1.4.2. Motores duales.

Los motores duales constituyen otro de los puntos de interés actualmente y se encuentra muy relacionado con el funcionamiento a alto potencial de descarga. Estos motores se caracterizan por poder funcionar eficientemente y para una misma potencia nominal en dos regímenes de operación muy diferentes: un régimen a bajo empuje y alto impulso específico, y otro régimen de alto empuje y bajo impulso específico.

El interés por este tipo de motores reside en que la posibilidad de operar eficientemente en esos dos regímenes permitiría realizar tanto misiones de transferencia de órbita como misiones de corrección de órbita con el mismo sistema propulsivo basado en la tecnología de efecto Hall. En el primero de los casos la variable a minimizar es el tiempo con lo que un empuje elevado es necesario. Por contra, en el segundo tipo de misión conviene reducir el gasto de combustible con lo que es deseable utilizar un impulso específico elevado.

En el gráfico (1.3) se muestran estos dos regímenes tan interesantes y los posibles problemas asociados a los mismos.

Actualmente, tanto en Europa y Rusia como en E.E.U.U. existen programas de desarrollo y diseño de este tipo de motores. En particular, en Europa la compañía francesa Snecma está diseñando un motor dual(PPS-5000) pensado para trabajar a potencias de 5 KW y ser utilizado en la futura generación de satélites geoestacionarios europea (@bus).

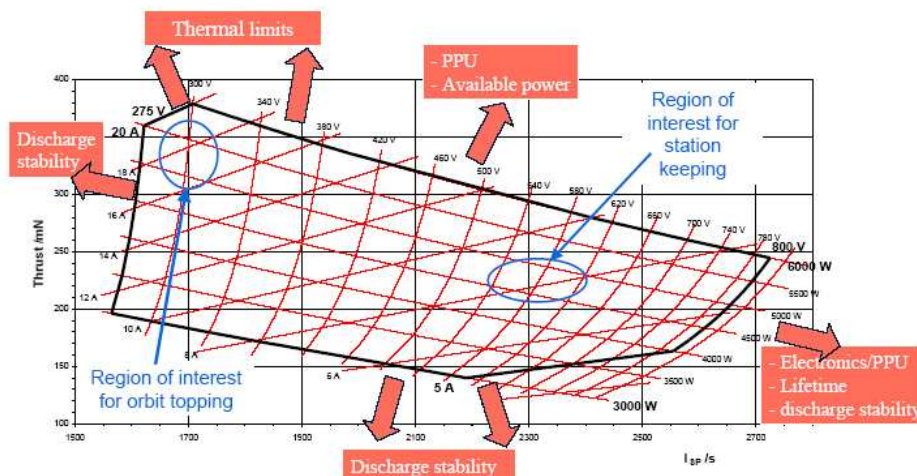


Figura 1.3: Regímenes de funcionamiento en motores duales

### 1.4.3. Motores de doble etapa.

A diferencia de los motores Hall convencionales o de una sola etapa, los motores de doble etapa se encuentran en un grado de desarrollo mucho menor debido a la mayor complejidad de los mismos. Es más, muy diversos diseños han sido propuestos con objeto de obtener el funcionamiento a doble etapa pero los resultados no han sido tan satisfactorios como se esperaba.

La idea fundamental en la que se basan este tipo de motores es en separar los procesos de ionización y de aceleración de partículas lo máximo posible con el objeto de hacerlos más eficientes y de poder utilizar en cada zona un campo magnético, geometría, etc adecuados, tal y como ocurre en los motores iónicos. Para ello se introduce en el interior del motor un dispositivo capaz de introducir corriente eléctrica en forma de electrones de forma que en la región de aceleración la corriente electrónica sea baja y en la región de ionización esta corriente sea elevada para conseguir una ionización muy eficiente. El dispositivo a utilizar es muy diverso, bien un cátodo interior o bien un electrodo intermedio de un material de alta emisividad de electrones u otros dispositivos de mayor complejidad.

Los beneficios de la utilización de motores de doble etapa todavía no están claros según los resultados experimentales. En algunos casos no se obtienen mejoras en términos de eficiencia y en otros, existe una pequeña mejora para una determinada posición y voltaje del electrodo intermedio. Incluso en algunos casos se obtienen incrementos en el empuje a costa de descensos en la eficiencia.

En algunas ocasiones este tipo de motores de doble etapa se suelen asociar al funcionamiento dual, es decir, en el régimen de alto impulso específico se utiliza el motor funcionando en doble etapa y en el régimen de alto empuje se utiliza el motor con el electrodo intermedio desactivado.

En cualquier caso las mejoras en el funcionamiento a doble etapa que teóricamente se predicen están aún sin explotar y en parte puede deberse a una falta de entendimiento de física de los procesos envueltos y las características especiales de estos motores.

#### 1.4.4. Problemas tecnológicos.

Uno de los aspectos de mayor importancia en la utilización de los motores Hall es su vida útil. El factor determinante de la vida útil en estos motores normalmente es la erosión de las paredes cerámicas debido al impacto de iones de alta energía, fenómeno conocido como sputtering. A la hora de determinar la vida útil es necesario realizar experimentos muy costosos por lo que modelos que permitan predecir el grado de erosión pueden ser de gran utilidad.

Por otro lado, las oscilaciones en intensidad de descarga, empuje, etc pueden ser muy peligrosas y conviene reducirlas al máximo, bien por un diseño adecuado o bien por la utilización de mecanismos externos al propio motor. Así por ejemplo en el motor PPS-1350 se utiliza un sistema de inyección de gasto variable con objeto de disminuir las oscilaciones. Estas oscilaciones pueden afectar de diversas formas al funcionamiento del motor o al satélite en general entre las cuales cabe destacar:

- interferencia electromagnética de con las comunicaciones del satélite y las estaciones de control en tierra.
- reducción drástica de la vida útil del motor.

Así pues una buena modelización tanto del fenómeno de erosión como de las oscilaciones puede ser interesante para ayudar a resolver estos problemas.

## Capítulo 2

# Modelización numérica:

# Ecuaciones generales

Desde la aparición de los primeros ordenadores la modelización de distintos problemas físicos ha sufrido un importante avance gracias a la capacidad de computación tan elevada de dichas máquinas y a la gran mejora en los métodos numéricos de resolución de ecuaciones. Esto ha permitido hoy en día poder predecir el comportamiento de distintos sistemas físicos con un grado de aproximación muy adecuado sin necesidad de acudir a la experimentación. Tal es así que se habla de experimentos computacionales. El hecho de poder evitar en una etapa inicial los experimentos conlleva una reducción en los costes de desarrollo de todo nuevo producto nada despreciable. De ahí el especial interés que se está poniendo actualmente en la modelización numérica.

Precisamente es ése el campo en el que se engloba el presente proyecto, cuyo objetivo es el desarrollo de un modelo consistente, capaz de reproducir adecuadamente el comportamiento del plasma en motores de efecto Hall y con un coste computacional no demasiado alto de forma que el modelo pueda ser utilizado en tiempo de diseño y prediseño.

En este segundo capítulo se pretende hacer un resumen de fundamentos y una breve descripción de las principales metodologías a utilizar a la hora de modelizar el flujo de plasma en el motor.

## 2.1. Teoría cinética

Tal y como se define en [32] un plasma es un sistema formado un enorme número de partículas con y sin carga eléctrica que interaccionan entre sí, básicamente, a través de colisiones. Desde este punto de vista la mejor aproximación posible para la modelización de fluidos en general, y de plasmas en particular, es la teoría cinética donde se hace uso de métodos estadísticos de forma extensiva.

Puesto que el estado de toda partícula viene definido por su posición ,  $\vec{r}(x, y, z)$ , y su velocidad ,  $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$ , se puede decir que toda la información relativa al plasma está contenida en un espacio 6-dimensional en el cual se existen N vectores (donde N es el número de partículas que constituyen el plasma) de seis dimensiones cada uno  $(\vec{r}, \vec{v})$  que representan la posición y velocidad de las partículas.

Toda la información anterior se puede representar de forma resumida a través de la función de distribución  $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ . La definición de la misma es como sigue: en ese espacio 6-dimensional  $(x, y, z, v_x, v_y, v_z)$  representa la densidad de partículas tales que su posición se encuentra contenida entre  $\vec{r}$  y  $\vec{r} + d\vec{r}$  y su velocidad entre  $\vec{v}$  y  $\vec{v} + d\vec{v}$  donde  $d\vec{r}$  y  $d\vec{v}$  representan las dimensiones de dos elementos de volumen en sus respectivos espacios de tamaño pequeño frente a la dimensión típica del problema, pero suficientemente grande como para contener un número elevado de partículas. Claramente, el conocimiento de dicha función para todo instante temporal permite describir por completo el movimiento del plasma.

A partir de la gran cantidad de información que contiene la función de distribución es posible definir todas las variables macroscópicas de interés tales como densidad, velocidad, temperatura, etc. Para ello basta con integrar la función de distribución en el espacio de velocidades. Así por ejemplo, la densidad de partículas de una especie  $\alpha$ ,  $n_\alpha(\vec{r}, t)$  con función de distribución  $f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)$  se puede calcular como:

$$n_\alpha(\vec{r}, t) = \int_{\Omega(\vec{v})} f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v} \quad (2.1)$$

donde dicha integral de volumen se extiende a todo el campo de velocidades de las partículas, en principio, de  $v \rightarrow +\infty$  a  $v \rightarrow -\infty$  para cada componente.



Puesto que será de gran ayuda posteriormente conviene definir de forma análoga otras variables macroscópicas calculando momentos de orden superior de la función de distribución:

- vector flujo medio de partículas:

$$\vec{g}_\alpha(\vec{r}, t) = \int_{\Omega(\vec{v})} \vec{v} f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v} \quad (2.2)$$

- tensor flujo medio de cantidad de movimiento:

$$\overline{\overline{P}}_\alpha(\vec{r}, t) = \int_{\Omega(\vec{v})} m_\alpha \vec{v} \vec{v} f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v} \quad (2.3)$$

- densidad de energía total media

$$W_\alpha(\vec{r}, t) = \int_{\Omega(\vec{v})} (1/2) m_\alpha v^2 f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v} \quad (2.4)$$

- vector flujo medio de energía total:

$$\vec{e}_\alpha(\vec{r}, t) = \int_{\Omega(\vec{v})} (1/2) m_\alpha v^2 \vec{v} f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v} \quad (2.5)$$

A partir de las definiciones anteriores es posible definir otras variables macroscópicas tales como:

- vector velocidad media:

$$\vec{u}_\alpha(\vec{r}, t) = \frac{\vec{g}_\alpha}{n_\alpha} \quad (2.6)$$

- tensor de presión:

$$\overline{\overline{p}}_\alpha(\vec{r}, t) = \overline{\overline{P}}_\alpha - m_\alpha n_\alpha \vec{u}_\alpha \vec{u}_\alpha = \int_{\Omega(\vec{v})} m_\alpha \vec{c} \vec{c} f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v} \quad (2.7)$$

Es interesante señalar que en general la velocidad media difiere de la velocidad de cada partícula, siendo la velocidad diferencial de la partícula  $\vec{c} = \vec{v} - \vec{u}_\alpha$ .

En cuanto al tensor de presión cabe señalar que los términos de fuera de la diagonal están relacionados con la viscosidad, mientras que los términos de la diagonal representan la presión la fuerza normal por unidad de área. Así la presión escalar se puede obtener como un tercio de la traza del tensor de presión, es decir:

$$p_\alpha(\vec{r}, t) = \frac{1}{3} \text{tr}(\bar{\bar{p}}_\alpha) = \int_{\Omega(\vec{v})} (1/3) m_\alpha c^2 f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v} \quad (2.8)$$

A partir de los términos diagonales del tensor de presión es posible definir una temperatura en cada una de las direcciones espaciales como:

$$n_\alpha k T_{\alpha_i}(\vec{r}, t) = \bar{\bar{p}}_{\alpha_{ii}} \quad (2.9)$$

La temperatura absoluta se puede definir como la media de las tres temperaturas según cada dirección alcanzándose entonces la ecuación de estado de los gases ideales que adquiere la forma de:

$$p_\alpha = n_\alpha k T_\alpha \quad (2.10)$$

donde  $k$  es la constante de Boltzmann.

Asimismo se puede definir el vector flujo de calor como:

$$\vec{q}_\alpha(\vec{r}, t) = \int_{\Omega(\vec{v})} (1/2) m_\alpha c^2 \vec{v} f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v} \quad (2.11)$$

A partir de estas definiciones se deduce que el flujo de energía total se puede descomponer en tres términos bien diferenciados:

$$\vec{e}_\alpha = W_\alpha \vec{u}_\alpha + \vec{u}_\alpha \cdot \bar{\bar{P}}_\alpha + \vec{q}_\alpha \quad (2.12)$$

donde  $W_\alpha$  se puede calcular como  $W_\alpha = (1/2) m_\alpha n_\alpha u_\alpha^2 + \frac{3}{2} p_\alpha$

Para una descripción más exhaustiva de todas estas variables y otras muchas se recomienda acudir a [32].

Todo este análisis parte de la hipótesis del conocimiento de la función de distribución. Sin embargo, en un caso general, el conocer la función de distribución requiere la resolución de la ecuación de Boltzmann, o de alguna variante suya como la ecuación de Vlasov. La ecuación de Boltzmann sin término colisional adquiere la forma de:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f_\alpha + \vec{a} \cdot \nabla_{\vec{v}} f_\alpha = 0 \quad (2.13)$$

donde  $\vec{a}$  es el vector aceleración de las partículas y  $\nabla_{\vec{v}}$  es el operador  $\nabla$  referido al espacio de velocidades. El término colisional se introduce como un término fuente en el miembro derecho de la ecuación y para su modelización existen muy diversas metodologías. La ecuación anterior es una ecuación en derivadas parciales con 7 variables independientes y una sola incógnita, la función de distribución.

En general resolver la ecuación de Boltzmann resulta muy complicado y por ello se acude a realizar diversas hipótesis que dan lugar a distintas aproximaciones al problema entre las cuales cabe destacar:

- aproximación fluida: en la que se renuncia al conocimiento de la función de distribución exacta, y se concentra en el cálculo de las magnitudes macroscópicas más importantes que definen al plasma como fluido.
- métodos de partículas: en la que la noción de fluido se pierde y se pasa a tratar el plasma como un conjunto de partículas cuyo movimiento es calculado a través de la ecuación de Newton.

Más adelante se analizará cada una de estas metodologías por separado pues son las que se utilizarán en el proyecto.

**Función de distribución maxwelliana**

Este tipo de distribución es de especial importancia en el análisis de los fluidos pues tiene la propiedad de ser la solución de la ecuación de Boltzmann para el equilibrio. Además, en condiciones de no equilibrio, la distribución se aproxima en gran medida a ser una maxwelliana. Es por ello que en muchas ocasiones se supone que la función de distribución es de este tipo, lo cual es tanto más correcto cuanto mayor es el grado de colisionalidad del plasma.

La distribución maxwelliana tridimensional isótropa viene dada por una expresión de la forma:

$$f_{\alpha}(\vec{r}, \vec{v}, t) = n_{\alpha}(\vec{r}, t) \left( \frac{m_{\alpha}}{2\pi k T_{\alpha}(\vec{r}, t)} \right)^{3/2} \exp \left( - \frac{m_{\alpha} \|\vec{v} - \vec{u}_{\alpha}(\vec{r}, t)\|^2}{2k T_{\alpha}(\vec{r}, t)} \right) \quad (2.14)$$

donde  $k$  es la constante de Boltzmann y algunas de sus propiedades más interesantes se resumen a continuación:

- tensor flujo medio de cantidad de movimiento:

$$\bar{\bar{P}}_{\alpha}(\vec{r}, t) = \int_{\Omega(\vec{v})} m_{\alpha} \vec{v} \vec{v} f_{\alpha}(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v} = p_{\alpha} \bar{\bar{I}} + m_{\alpha} n_{\alpha} \vec{u}_{\alpha} \vec{u}_{\alpha} \quad (2.15)$$

- vector flujo medio de energía total:

$$\vec{e}_{\alpha}(\vec{r}, t) = \int_{\Omega(\vec{v})} (1/2) m_{\alpha} v^2 \vec{v} f_{\alpha}(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v} = \left( (1/2) m_{\alpha} u_{\alpha}^2 + \frac{5}{2} p_{\alpha} \right) \vec{u}_{\alpha} \quad (2.16)$$

También es posible hablar de una función de distribución maxwelliana unidimensional que será de utilidad más adelante:

$$f_{\alpha}(\vec{r}, v_x, t) = n_{\alpha} \left( \frac{m_{\alpha}}{2\pi k T_{\alpha}} \right)^{1/2} \exp \left( - \frac{m_{\alpha} (v_x - u_{x_{\alpha}})^2}{2k T_{\alpha}} \right) \quad (2.17)$$

## 2.2. Conceptos básicos de la aproximación fluida

Como ya se ha mencionado anteriormente la aproximación fluida consiste en no intentar calcular la función de distribución sino únicamente variables macroscópicas tales como densidad, velocidad, temperatura, etc. Puesto que estas variables son el resultado de calcular momentos de la distribución de velocidades, las ecuaciones que han de verificar dichas variables se obtienen a partir de tomar momentos de la ecuación de Boltzmann. Para un momento de orden genérico es posible obtener la llamada ecuación macroscópica de transporte. Si se particulariza para propiedades como la masa, la cantidad de movimiento o la energía cinética de las partículas según cada dirección del espacio permite obtener respectivamente, la ecuación de conservación de la masa, la ecuación de conservación de cantidad de movimiento, y la ecuación de conservación de la energía total en cada dirección. Para tener un sistema de ecuaciones con igual número de incógnitas que de ecuaciones es necesario hacer ciertas hipótesis sobre los términos viscosos y sobre la conducción de calor. Al final queda un sistema de siete incógnitas  $(n_\alpha, \vec{u}_\alpha, \vec{T}_\alpha)$  con siete ecuaciones que describen la física asociada a una especie.

Obviamente cuando se trabaja con un plasma con más de una especie de partículas aparece un juego de ecuaciones como el anterior para cada una de las especies estando entonces el problema cerrado a falta de condiciones iniciales y de contorno.

A continuación se muestran las ecuaciones de conservación anteriores con la salvedad de que las ecuaciones de la energía total según cada dirección aparecen sumadas dando lugar a la ecuación de conservación de la energía total en la cual aparece la temperatura absoluta a través de la presión escalar y la ecuación de estado.

- **Ecuación general de conservación de la masa:**

$$m_\alpha \frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (m_\alpha n_\alpha \vec{u}_\alpha) = m_\alpha \dot{n}_\alpha \quad (2.18)$$

▪ **Ecuación general de conservación de la cantidad de movimiento:**

$$\frac{\partial}{\partial t}(m_\alpha n_\alpha \vec{u}_\alpha) + \nabla \cdot (m_\alpha n_\alpha \vec{u}_\alpha \vec{u}_\alpha) = -\nabla \cdot \vec{p}_\alpha + Z_\alpha e n_\alpha (\vec{E} + \vec{u}_\alpha \times \vec{B}) + \vec{M}_\alpha \quad (2.19)$$

▪ **Ecuación general de conservación de la energía total:**

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{3}{2} p_\alpha + \frac{1}{2} m_\alpha n_\alpha u_\alpha^2 \right) + \nabla \cdot \left( \frac{3}{2} p_\alpha \vec{u}_\alpha + \frac{1}{2} m_\alpha n_\alpha u_\alpha^2 \vec{u}_\alpha + \vec{q}_\alpha \right) = \\ = -\nabla \cdot (\vec{p}_\alpha \cdot \vec{u}_\alpha) + Z_\alpha e n_\alpha \vec{u}_\alpha \cdot \vec{E} + E_\alpha \end{aligned} \quad (2.20)$$

donde  $\dot{n}_\alpha$ ,  $\vec{M}_\alpha$  y  $E_\alpha$  son los distintos términos fuente/sumidero de partículas, cantidad de movimiento y energía debido a los procesos colisionales existentes entre las distintas especies y  $Z_\alpha$  es el número de carga de la especie considerada. Nótese que se supone que las únicas fuerzas volumétricas actuando sobre el plasma son el campo eléctrico y el campo magnético.

Las anteriores ecuaciones se simplifican en gran medida si se supone que la función de distribución es isótropa. En ese caso, los términos diagonales del tensor de presión son iguales entre sí y a la presión escalar, de forma que las temperaturas según cada dirección son iguales entre sí y a la temperatura absoluta del plasma. Por otro lado, la viscosidad en plasmas se suele despreciar. Bajo estas dos hipótesis el tensor de presión se reduce a la matriz unidad multiplicada por la presión escalar y las ecuaciones de conservación quedan entonces en la forma:

▪ **Ecuación de conservación de la masa:**

$$m_\alpha \frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (m_\alpha n_\alpha \vec{u}_\alpha) = m_\alpha \dot{n}_\alpha \quad (2.21)$$

▪ **Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento:**

$$\frac{\partial}{\partial t}(m_\alpha n_\alpha \vec{u}_\alpha) + \nabla \cdot (m_\alpha n_\alpha \vec{u}_\alpha \vec{u}_\alpha) = -\nabla p_\alpha + Z_\alpha e n_\alpha (\vec{E} + \vec{u}_\alpha \times \vec{B}) + \vec{M}_\alpha \quad (2.22)$$

▪ **Ecuación de conservación de la energía total:**

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{3}{2} p_\alpha + \frac{1}{2} m_\alpha n_\alpha u_\alpha^2 \right) + \nabla \cdot \left( \frac{3}{2} p_\alpha \vec{u}_\alpha + \frac{1}{2} m_\alpha n_\alpha u_\alpha^2 \vec{u}_\alpha + \vec{q}_\alpha \right) = \\ = -\nabla \cdot (p_\alpha \cdot \vec{u}_\alpha) + Z_\alpha e n_\alpha \vec{u}_\alpha \cdot \vec{E} + E_\alpha \end{aligned} \quad (2.23)$$

Las ecuaciones (2.21), (2.22) y (2.23) son las que se suelen utilizar en modelos fluidos, aunque como se puede observar del desarrollo anterior llevan implícitas multitud de hipótesis. Matemáticamente, constituyen un sistema de cinco ecuaciones con cinco incógnitas funciones de la posición y del tiempo  $(\vec{r}, t)$  y que requiere de algún modelo adicional para diversas variables, por ejemplo, la conducción de calor.

Estas ecuaciones serán el punto de partida a la hora de modelar la especie de electrones como se verá en el capítulo 5.

Quizás una de las hipótesis más restrictivas para el presente proyecto sea el asumir una distribución isótropa para la temperatura. En general, la presencia de un campo magnético tiende a provocar una fuerte anisotropía en el plasma, con lo que es necesario distinguir entre temperaturas según la dirección paralela y perpendicular al campo magnético. Actualmente, existen modelos que hacen dicha distinción, aunque en general tiende a complicar la formulación del problema.

### 2.3. Conceptos básicos de los métodos de partículas

En este caso el plasma es tratado como un conjunto de partículas, cargadas y no cargadas, que se mueven sometidas a la acción de fuerzas eléctricas y magnéticas y cuyo movimiento se ve afectado por las colisiones con otras partículas. Una de las variantes más utilizada de estos métodos es el llamado método *Particle in Cell* (PIC) cuyas bases a continuación se describen.

En este tipo de modelos, por cuestiones de coste computacional, el número de partículas no puede ser demasiado elevado, y por ello se habla de macropartículas con una masa varios órdenes de magnitud superior a la de la partícula que representan. Así, para simulaciones típicas de una hora de duración se pueden llegar a manejar varias decenas de miles de partículas en todo el dominio de simulación. Por contra el número real de partículas en todo el volumen de un motor Hall puede estimarse suponiendo una densidad de partículas típica de  $10^{17}$ (partículas/m<sup>3</sup>) en un volumen total típico de 100(cm<sup>3</sup>) como  $10^{14}$  partículas, muy superior al valor de macropartículas. A pesar de esta enorme diferencia estos métodos de partículas se basan en que basta un número relativamente bajo de macropartículas por celda para reproducir correctamente la física. En los métodos PIC más usuales la masa de las partículas se mantiene constante, pudiéndose eliminar partículas o crear otras nuevas debido a distintos procesos tales como ionización, recombinación, interacción con las paredes y algunos otros más.

El movimiento de dichas macropartículas se calcula integrando la ecuación de Newton que para el caso que nos ocupa adquiere la forma de:

$$m_p \frac{d^2 \vec{r}_p}{dt^2} = \vec{F}(\vec{r}_p, \vec{v}_p, t) = q_p \left( \vec{E}(\vec{r}_p, t) + \vec{v}_p \times \vec{B}(\vec{r}_p, t) \right) \quad (2.24)$$

Donde el segundo término es conocido con el nombre de Fuerza de Lorentz. La integración de esta ecuación para campos eléctrico y magnético dados permite calcular la posición y la velocidad de cada macropartícula a lo largo del tiempo sin contar el efecto de las colisiones.



Para considerar el efecto de las colisiones existen distintas metodologías, unas más costosas computacionalmente que otras. Se puede destacar dos de ellas:

- *Monte-Carlo Collisions* (MCC)

Se caracterizan por requerir que una de las especies involucradas en el proceso colisional domine sobre la otra en términos de densidades. De esta forma el efecto neto debido a una colisión sobre la especie que domina es despreciable, mientras que el efecto sobre la especie no dominante puede calcularse a partir de promedios macroscópicos de las variables de la especie dominante. Los valores macroscópicos de la especie dominante evaluados en los nodos de la simulación permiten calcular la probabilidad de que cada macropartícula sufra una colisión, y comparándola con un número generado de forma aleatoria entre 0 y 1 es posible determinar si la colisión ocurre o no. En caso de que la colisión ocurra, se han de evaluar los efectos que tiene sobre las propiedades de la macropartícula de la especie no dominante en términos de cantidad de movimiento, masa, carga eléctrica, etc...

- *Direct Simulation Monte-Carlo collisions*(DSMC)

A diferencia del método MCC, en este caso las dos especies involucradas se tratan como partículas siendo necesario modificar las variables de ambas partículas en caso de que la colisión tenga lugar. De este tipo existen multitud de variantes aunque la mas común es la que introduce un tiempo de colisiones. De entrada supone que solo puede sufrir colisiones aquellas partículas que se encuentran en una misma celda y a cada celda le asigna a partir de variables macroscópicas un tiempo de colisión a partir del cual es posible evaluar el número máximo de colisiones que podrían ocurrir. Para cada una de ellas, se selecciona una pareja al azar dentro de la celda, y a partir de sus velocidades y posiciones se calcula la probabilidad de que la colisión ocurra. Dadas sus características este proceso es mucho más costoso computacionalmente que el anterior aunque más preciso.

Con todo, el conocer la posición y velocidad de las macropartículas en todo momento en cierta forma es equivalente a conocer la función de distribución. Obviamente, el número de macropartículas es insuficiente para calcular en todo punto la función de distribución si se aplica de forma estricta su definición.

A pesar de ello se puede calcular las principales variables macroscópicas a partir de la posición y velocidad de las partículas en los nodos de una malla espacial mediante un proceso similar a tomar momentos de la función de distribución. Este proceso se denomina pesado y es una manera discreta de calcular los momentos de  $f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)$ . Así, por ejemplo, para un problema puramente unidimensional y una malla uniforme en la coordenada  $x$ , el pesado de la densidad de partículas  $\alpha$  al nodo  $j$  vendría dado por la expresión:

$$n_{\alpha_j} = \frac{1}{\Delta V_j} \sum_{p=\alpha} \frac{m_p}{m_\alpha} S_j(x_p) \quad (2.25)$$

donde el sumatorio está extendido a todas las partículas de la especie  $\alpha$ ,  $\Delta V_j$  es el volumen asociado al nodo  $j$ ,  $x_p$  es la posición de la partícula  $p$ ,  $S_j(x)$  es la llamada función de pesado asociada al nodo  $j$  y  $m_p/m_\alpha$  es el número de partículas  $a$  que equivale la macropartícula  $p$ .

Así cada macropartícula distribuye su masa, o el número de partículas que representa, entre los nodos de su entorno y en base a una función de pesado. Por ello las funciones de pesado deben cumplir una relación para verificar conservación de masa:

$$\sum_j S_j(x) \equiv 1 \quad \forall x \quad (2.26)$$

donde el sumatorio está extendido a todos los nodos de la malla considerada.

En el caso más sencillo la función de pesado es de valor constante e igual a la unidad dentro del intervalo centrado en el nodo correspondiente y de longitud  $\Delta x$  (espaciado de la malla) y nula en el resto del dominio. En este caso toda la masa de la partícula se ‘pesa’ al nodo más cercano. Este tipo de funciones de pesado se denominan de orden 0 y requieren un número de partículas mayor que las necesarias en funciones de pesado de mayor orden para reducir las oscilaciones estadísticas.

Las funciones de pesado más utilizadas son las de orden 1 pues suponen una mejora respecto a las anteriores sin requerir un aumento excesivo del tiempo de cálculo. Obsérvese que el proceso de pesado es una operación bastante costosa computacionalmente y conviene optimizarla al máximo. Esas funciones de pesado de orden 1 varían linealmente de un nodo a otro:

$$S_j^1(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < x_{j-1} \text{ o } x > x_{j+1} \\ 1 - \frac{|x_j - x|}{\Delta x} & \text{para } x_{j-1} < x < x_{j+1} \end{cases} \quad (2.27)$$

En este caso la masa de cada partícula se distribuye entre los nodos que la contienen en base a una ley lineal función de la distancia a cada nodo.

Otra forma de interpretar el proceso de pesado es suponer que las funciones de pesado están ligadas a la partícula acompañándolas en su movimiento. En este caso la expresión para el pesado sería:

$$n_{\alpha_j} = \frac{1}{\Delta V_j} \sum_{p=\alpha} \frac{m_p}{m_\alpha} S_p(x_j) \quad (2.28)$$

donde la función de pesado depende de la posición del nodo y no de la de la partícula.

Gráficamente los dos tipos de funciones de pesado descritas hasta el momento se comparan en la figura (2.1).

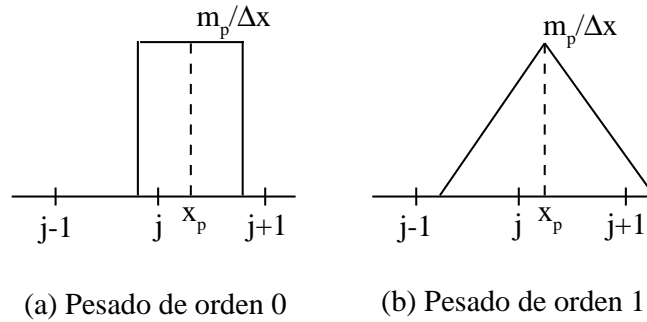


Figura 2.1: Comparación de las distintas funciones de pesado en una malla unidimensional. (a) Pesado de orden 0. (b) Pesado de orden 1.

En un caso bidimensional axilsimétrico el proceso de pesado de densidad de partículas es análogo al unidimensional y está descrito en profundidad en [12]:

$$n_{\alpha_{jk}} = \frac{1}{\Delta V_{jk}} \sum_{p=\alpha} \frac{m_p}{m_\alpha} S_{jk}(\vec{x}_p) \quad (2.29)$$

donde el volumen de pesado asociado a cada nodo se calcula de la siguiente forma:

$$\Delta V_{jk} = \int_{\Omega_{jk}} 2\pi r S_{jk}(\vec{x}) d\Omega \quad (2.30)$$

con  $\Omega_{jk}$  el dominio del plano meridiano  $(r, z)$  donde la función de pesado  $S_{jk}(\vec{x})$  no se anula.

De igual forma que se ha calculado la densidad de partículas por pesado es posible calcular el resto de variables macroscópicas acudiendo a la analogía con la función de distribución y sus momentos. Así es posible calcular por ejemplo:

- vector flujo medio de partículas:

$$\vec{g}_{\alpha_{jk}} = \frac{1}{\Delta V_{jk}} \sum_{p=\alpha} \frac{m_p}{m_\alpha} \vec{v}_p S_{jk}(\vec{x}_p) \quad (2.31)$$

- tensor flujo medio de cantidad de movimiento:

$$\overline{\overline{P}}_{\alpha_{jk}} = \frac{1}{\Delta V_{jk}} \sum_{p=\alpha} m_p \vec{v}_p \vec{v}_p S_{jk}(\vec{x}_p) \quad (2.32)$$

- densidad media de energía cinética:

$$W_{\alpha_{jk}} = \frac{1}{\Delta V_{jk}} \sum_{p=\alpha} (1/2) m_p v_p^2 S_{jk}(\vec{x}_p) \quad (2.33)$$

- vector flujo medio de energía total:

$$\vec{e}_{\alpha_{jk}} = \frac{1}{\Delta V_{jk}} \sum_{p=\alpha} (1/2) m_p v_p^2 \vec{v}_p S_{jk}(\vec{x}_p) \quad (2.34)$$

Por tanto el proceso de pesado permite calcular todas las variables macroscópicas a partir de la información de las partículas (posición y velocidad).

De forma inversa, para poder calcular el movimiento de las partículas se debe conocer los campos eléctrico y magnético, en cuyo cálculo se puede hacer uso de las variables macroscópicas calculadas anteriormente. Ahora bien, para que esto sea coherente el campo eléctrico y magnético deben conocerse en la posición de cada partícula para lo cual, y a partir de la información en los nodos, se realiza un proceso de pesado, esta vez de los nodos a las partículas de la siguiente forma:

$$\vec{E}(\vec{x}_p) = \sum_{(jk)} \vec{E}_{jk} S_{jk}(\vec{x}_p) \quad (2.35)$$

$$\vec{B}(\vec{x}_p) = \sum_{(jk)} \vec{B}_{jk} S_{jk}(\vec{x}_p)$$

Al igual que el campo eléctrico o el magnético, cualquier otra variable que necesite calcularse en la posición de la partícula debe sufrir un proceso de pesado análogo al anterior.

El procedimiento para calcular los campos eléctrico y magnético a partir de las variables macroscópicas depende mucho del tipo de código, aunque en un modelo en el que todas las especies sean modeladas como partículas se han de resolver las ecuaciones de Maxwell. En códigos híbridos como el del presente proyecto el procedimiento a utilizar es completamente distinto como se verá posteriormente.

Este tipo de método de partículas PIC descrito en este apartado es el que se usa a la hora de modelar las especies pesadas, iones y neutros con ciertas peculiaridades que se describirán en el capítulo (4). En cualquier caso, para una descripción completa de los métodos PIC se recomienda acudir a [29].



## Capítulo 3

# HPHall-2

### 3.1. Introducción

HPHall-2 es un código de simulación para motores de efecto Hall resultado de un programa de desarrollo llevado a cabo en la E.T.S.I. Aeronáuticos a partir de un código originalmente creado en el Massachusetts Institute of Technology (MIT).

La característica fundamental de HPHall-2 es que se trata de un código híbrido en el cual las partículas iónicas y neutras presentes en el plasma son modelizadas con métodos de partículas, mientras que los electrones son modelizados como un fluido.

Otras características interesantes de HPHall y que posteriormente son justificadas se pueden resumir en:

- simetría cilíndrica de todas las variables.
- campo magnético estacionario, potencial, con función de corriente e impuesto externamente.
- cuasineutralidad, esto es, localmente la densidad de carga eléctrica es nula.
- método partículas tipo PIC (*particle in cell*) que interacciona con el modelo fluido de electrones a través del cálculo de propiedades macroscópicas en los nodos de la simulación numérica.

En [28] se describe el código original que ha venido siendo utilizado desde su creación en 1998 en diversos proyectos por el Air Force Research Laboratory (AFRL) de Estados Unidos. Sin embargo, diversas razones aconsejaban continuar con el desarrollo del mismo. Entre dichas razones cabe destacar:

- múltiples avances en el entendimiento de la física de los motores de efecto Hall.
- interés creciente por motores Hall no convencionales como por ejemplo motores de doble etapa o motores de alto impulso específico.
- mejora de los algoritmos de modelización numérica.
- deficiente interacción entre el código de partículas y el de electrones, sobre todo en lo referido a la interacción con la pared y cálculo de actuaciones.
- importante aumento de la velocidad de los ordenadores, de forma que ciertas metodologías que por ser demasiado costosas computacionalmente no podían ser usadas inicialmente, empiecen a ser factibles hoy en día.
- diversas incongruencias sobre todo en lo que se refiere al modelo de electrones y a la interacción con la pared del método de partículas.
- estructura compleja del código que dificulta en gran medida la introducción de diferentes geometrías, la implementación de nuevas mejoras, el uso del código por otras personas ajenas a la programación y creación del mismo, etc.

Por ello, en 2004 se inició una mejora y actualización del código por parte de Parra y Ahedo y financiado por el AFRL. Estas mejoras se centraron en el subcódigo de partículas, principalmente en lo referido a la interacción con la pared [27]. Los avances conseguidos fueron importantes, pero sin embargo las posibilidades del código seguían siendo reducidas y los resultados del mismo seguían sin ser todo lo buenos que se podría esperar de un modelo de estas características. De esto se deduce que los principales problemas del código procedían del modelo tan simplificado de electrones. Por esa razón uno de los objetivos fundamentales del presente proyecto es el desarrollo e implementación de un nuevo modelo de electrones.



## 3.2. Objetivos del proyecto

Puesto que se trata de un proyecto que no parte de cero, conviene establecer claramente cuáles son los objetivos y contribuciones del presente proyecto:

- nuevo modelo de electrones, más general, preciso y consistente físicamente, que permita:
  - modelización de motores de doble etapa con electrodos intermedios.
  - tratamiento más adecuado del campo magnético y su influencia sobre los electrones.
  - modelización de campos magnéticos curvos en la zona del ánodo de una manera sencilla a la vez que rigurosa.
- mejoras relacionadas con el código de partículas:
  - estudio y propuestas para la interacción del código de partículas con las paredes.
  - tratamiento adecuado de los iones con doble carga, necesario para el análisis de motores de alto impulso específico.
  - mejora de la implementación del código de partículas con objeto de reducir el tiempo de ejecución del código.
- desarrollo de una interacción entre el modelo de partículas y el de electrones que evite diversos problemas latentes en el código original.
- desarrollo e implementación de un nuevo modelo de interacción del plasma con la pared para tener en cuenta efectos no considerados en los modelos actuales.
- nuevos algoritmos para modelizar apropiadamente paredes curvas de forma precisa.
- desarrollo de una nueva estructura del código y del manejo de los datos de entrada y salida para facilitar la ejecución del programa, la compresión de los resultados, etc.
- desarrollo de una documentación extensiva que permita una fácil y rápida familiarización con el código de simulación.
- análisis de resultados y comparación con diversos resultados experimentales con distintas configuraciones de motor, geometrías, parámetros de operación, etc.

### 3.3. Modelo 2D

Como ya se ha señalado en el capítulo 1, los motores de efecto Hall suelen tener una geometría anular. A pesar de ello experimentalmente se detecta la existencia de variaciones azimutales en la erosión del canal (ver [40]) y en el flujo de partículas en el chorro. Además, la presencia del cátodo rompe la simetría cilíndrica, si bien es cierto que este efecto se ve amortiguado por el movimiento fuertemente helicoidal que los electrones, los únicos que se ven influenciados por el cátodo, describen en su movimiento de cátodo a ánodo.

Por otro lado se piensa ([38, 39]) que la correlación de variaciones azimutales de densidad de plasma y del campo eléctrico puede incrementar la difusión de los electrones. Este hecho será modelado de una manera sencilla a través de difusión anómala. Dicha simplificación es necesaria pues para poder considerar dicho término sería necesario utilizar procedimientos demasiado complejos.

Por todo ello, la hipótesis de axilsimetría de las distintas variables del modelo parece adecuada y permite simplificar en gran medida los métodos de cálculo. Así el problema queda reducido a dos únicas dimensiones, la coordenada radial  $r$  y la coordenada axial  $z$ , pudiéndose establecer que todas las funciones dependen espacialmente de esas variables u otras que las sustituyan a través de alguna transformación matemáticamente correcta.

Para la generación de la malla espacial se acude al programa comercial Tecplot 10.0 que dispone de una herramienta de generación de mallas bidimensionales denominada Mesh Generator y que es muy adecuada para su utilización en HPHall-2. La malla es generada como preproceso previo a la ejecución de HPHall, reduciéndose así el tiempo de computación necesario.

La utilidad Mesh Generator de Tecplot 10.0 utiliza métodos de tipo elíptico para la generación de mallas estructuradas y permite utilizar para distintos parámetros modificar las propiedades de la malla, tales como refinado local de la malla, ortogonalidad, factores de relajación, etc . Esto le da una gran versatilidad al código pudiendo utilizar diversos tipos de mallas adecuadas para cada tipo de geometría a modelar.

Algunas de las mallas bidimensionales más típicas usadas para la modelización de un motor SPT-100 se muestran en la figura (3.1):

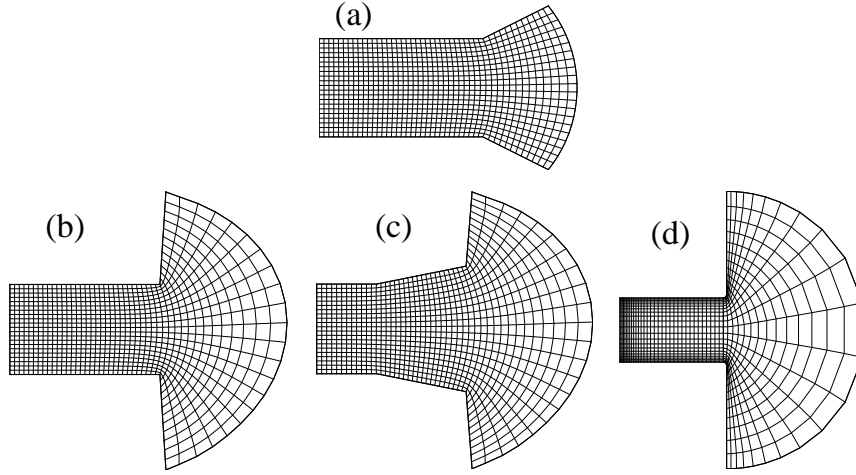


Figura 3.1: Diversos tipos de mallas utilizados en HPHall.

En la gráfica anterior se pueden distinguir:

- a) malla cuasi-unidimensional: esta malla fue utilizada de forma extensiva por Parra en ([27]) y en el presente código ha sido utilizada durante la puesta a punto del mismo. Sin embargo, para una modelización correcta es necesario reproducir el chorro completo.
- b) malla de chorro completo: permite representar de forma adecuada el chorro extendiendo la malla hasta las paredes verticales presentes a la salida del motor.
- c) malla de chorro completo y con paredes erosionadas: debido al impacto de iones de relativamente alta velocidad, las paredes del motor se erosionan por sputtering. Esto tiene importantes efectos sobre el funcionamiento del motor y determina la vida útil del mismo. Una manera rápida y sencilla de evaluar los efectos del sputtering en HPHall es la utilización de una malla como ésta.
- d) malla de chorro completo y refinada en las paredes: en las paredes la variación de las propiedades es mayor que en el centro del canal con lo que es allí donde la malla debe ser más fina. Además, tal y como se muestra en ([27]) esto permite evaluar de forma más adecuada el flujo de partículas hacia las paredes y del cual dependen en gran medida las pérdidas de energía hacia las mismas.

### 3.4. Campo magnético

El siguiente análisis es una justificación de las hipótesis asociadas al campo magnético y se debe a Fife ([28]), aunque por su interés se reproduce en este proyecto con algunos comentarios adicionales.

En general, las ecuaciones que permiten determinar el campo magnético  $\vec{B}$  son las ecuaciones de Maxwell:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (3.1)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (3.2)$$

En la ecuación (3.2) tanto el término asociado a la corriente eléctrica como el debido a la variación temporal del campo eléctrico son despreciables dentro del régimen usual de operación de los motores Hall. Por ejemplo, resultados experimentales de Bugrova [41] muestran que la componente fundamental de corriente eléctrica es la azimutal, de valor  $j_\theta \simeq 2 \cdot 10^4$  A/m<sup>2</sup>. Por otro lado, las variaciones temporales del campo eléctrico se pueden estimar como  $\partial \vec{E} / \partial t \sim V_d / L / t_c$  donde un valor típico para el potencial de descarga es  $V_d = 300$  V, la longitud típica del canal de motores Hall puede ser  $L = 30$  mm y el tiempo típico puede considerarse como el tiempo de residencia de los iones de Xenón en el interior del canal de aceleración  $t_c \sim L / v_i \sim 5 \cdot 10^{-7}$  s con  $v_i \sim \sqrt{2eV_d / m_i}$ . Estas aproximaciones permiten estimar que:

$$\frac{1}{\epsilon_0 c^2} \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \sim 0,02 \text{ T/m}$$

Por otro lado, un valor típico de la intensidad del campo magnético puede ser  $B \sim 0,03$  T con lo que  $\nabla \times \vec{B} \sim 1$  T/m. Por tanto parece justificada la hipótesis de campo magnético irrotacional.

$$\nabla \times \vec{B} = \vec{0} \quad (3.3)$$

A pesar de ello, esto no implica que en determinadas regiones del canal esos términos puedan llegar a ser importantes. En principio, un método PIC-híbrido como el del presente proyecto podría tener en cuenta esos efectos, aunque el tiempo de computación necesario se incrementaría enormemente.

Una consecuencia de las ecuaciones (3.1) y (3.3) es que el campo magnético no depende de la descarga del plasma y por tanto dicho campo puede ser calculado previamente.

En el presente proyecto, a diferencia del código original, se utiliza un código comercial para el cálculo del campo magnético a partir de la disposición del circuito magnético. En particular, se trabaja con la versión para estudiantes de Maxwell<sup>TM</sup> con licencia gratuita. Éste permite trabajar con campos magneto-estáticos y geometrías axilsimétricas como los que se utilizan en HPHall.

De las dos ecuaciones anteriores, (3.1) y (3.3), se deduce que el campo magnético tiene tanto función potencial, como función de corriente tales que:

- definición de función de corriente magnética

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \iff \nabla^2 \lambda = 0 \iff \frac{\partial \lambda}{\partial r} = -rB_z, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial z} = rB_r \quad (3.4)$$

- definición de función de potencial magnético

$$\nabla \times \vec{B} = 0 \iff \nabla \sigma = \vec{B} \iff \frac{\partial \sigma}{\partial r} = B_r, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial z} = B_z \quad (3.5)$$

Maxwell<sup>TM</sup> SV se encarga del cálculo de estas variables que permanecen constantes durante una simulación y a partir de ellas es posible definir un sistema de referencia magnético muy útil a la hora de resolver las ecuaciones de electrones, de ahí su especial importancia.

El campo magnético se calcula en tiempo de preproceso siendo un input para HPHall-2 y manteniéndose constante durante la ejecución del programa. Con ello se consigue reducir en gran medida el tiempo de computación necesario.

### 3.5. Cuasineutralidad

Una de la hipótesis más habituales en la resolución de problemas con gases ionizados de densidades medias y altas es la de cuasineutralidad. En una aproximación fluida las ecuaciones macroscópicas que describirían el movimiento de cada una de las especies presentes en el plasma estarían acopladas con las ecuaciones de Maxwell para el campo eléctrico. Sin embargo, para muchos plasmas la escala en la cual es posible encontrar carga eléctrica local no nula es del orden de la longitud de Debye. Así, para aquellas ocasiones en las que ésta longitud sea despreciable frente a la longitud típica del problema o, desde un punto de vista de la malla espacial para la resolución numérica, despreciable frente a la distancia media entre nodos, es posible suponer que hay cuasineutralidad, es decir, que la carga eléctrica es nula en todo el espacio. Matemáticamente esto se expresa de la siguiente forma:

$$n_e = \sum_{\alpha} Z_{\alpha} n_{i_{\alpha}} \quad (3.6)$$

donde el sumatorio en  $\alpha$  está extendido a todas las partículas con carga eléctrica positiva (iones simples, iones dobles... de distintos átomos),  $Z_{\alpha}$  es la carga eléctrica de cada una de ellos,  $n_{i_{\alpha}}$  es la densidad de cada tipo de ión y  $n_e$  es la densidad de electrones. Para un caso en el que sólo haya iones simples la expresión anterior se reduce a  $n_e = n_i \equiv n$  donde  $n$  es la llamada densidad del plasma.

La expresión general de la longitud de Debye es [30]:

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k T_e}{e^2 n_e}} \quad (3.7)$$

En un motor de efecto Hall convencional SPT-100 la temperatura máxima de electrones puede ser del orden de  $T_e \sim 30$  eV y la mínima densidad del plasma puede estimarse como de  $n_e \sim 10^{17}$  (partículas/m<sup>3</sup>) con lo que la longitud de Debye típica para un motor Hall resulta  $\lambda_D = 0,12$  mm. Si se compara este valor con la longitud típica del motor,  $L \sim 30$  mm, o con el espaciado medio de una malla de 60 nodos según el eje,  $\Delta z \sim L/60 \sim 0,5$  mm, resulta que en cualquiera de los dos casos la hipótesis de cuasineutralidad es aceptable.

En un código PIC-híbrido la condición de cuasineutralidad es particularmente útil pues mediante el método de partículas es posible calcular la densidad de plasma en cada punto y utilizar esto como entrada para la resolución de las ecuaciones fluidas asociadas a los electrones. Por contra en un método de partículas completo la condición de cuasineutralidad no se puede imponer y el campo eléctrico debe ser calculado a través de la ecuación de Poisson con el consiguiente coste computacional asociado.

Por contra existen zonas necesariamente no cuasineutras en el campo fluido debido a las condiciones de contorno que impone la interacción plasma-pared. En particular, en el ánodo y alrededor de todas las paredes del canal aparecen unas capas de espesor del orden de la longitud de Debye no cuasineutras denominadas usualmente vainas. Debido a que no son cuasineutras no pueden resolverse mediante las ecuaciones fluidas que se expondrán más adelante para los electrones. Esto provoca que dichas vainas aparezcan en los cálculos a través de las condiciones de contorno. Así, los límites del dominio computacional no son las paredes del canal o el ánodo exactamente sino que son las transiciones a las vainas no cuasineutras. Una parte importante del presente proyecto se dedica precisamente a esto, a la interacción plasma-pared.

Por otro lado en muchos trabajos (por ejemplo, en [35]) se señala que en el chorro exterior existen también zonas no cuasineutras. Sin embargo, los valores de densidad y temperatura obtenidos en este proyecto parecen indicar lo contrario. En cualquier caso la resolución correcta del chorro con zonas no cuasineutras no tiene fácil solución en un código híbrido como HPHall.





## Capítulo 4

# Método de partículas en HPHall-2

En el capítulo 3 se han descrito las características fundamentales de HPHall entre las cuales destaca que las partículas pesadas (iones y neutros) son modelizadas mediante un PIC, y en el capítulo 2 se describieron de forma muy sencilla dicho tipo de métodos. Debido a las peculiaridades de los motores Hall, es necesario introducir algunas modificaciones al método PIC convencional aunque la base sigue siendo la misma. Como resumen, puede decirse que las principales peculiaridades son las siguientes:

- malla no uniforme para reproducir la geometría del motor y del chorro exterior, lo cual hace necesario introducir una malla uniforme computacional y una transformación que permita relacionar dicha malla con la malla física.
- densidades de iones y neutros dos órdenes de magnitud diferentes, por lo que para tener un número semejante de macro-iones y macro-neutros es necesario que éstos últimos tengan una masa dos órdenes de magnitud superior a la de los primeros.

En este capítulo se describe las características del método PIC utilizado en HPHall, cuya base fue desarrollada por Fife en [28]. Sin embargo bastantes inconsistencias y problemas asociados al mismo fueron corregidas por Parra en [27] obteniéndose como resultado la nueva versión del código HPHall-2. Este proceso de mejora de dicho método PIC ha continuado en este proyecto implementando nuevos algoritmos.

### 4.1. Malla uniforme en el plano computacional

Debido a la axilsimetría del modelo no es necesario utilizar una malla tridimensional, sino que basta con una malla bidimensional en el plano  $(z, r)$ . Esta malla debe ser no uniforme para poder reproducir tanto en interior del canal del motor así como el chorro exterior del mismo. Sin embargo, el proceso de pesado descrito en el capítulo 2 requiere usar mallas uniformes. Por ello, es necesario crear un malla uniforme en el plano computacional  $(\xi, \eta)$  y una transformación que permita pasar de unas variables a otras (ver figura (4.1)). En particular, esto último se hará de la forma habitual en cálculo numérico, es decir, la transformación solo queda definida para cada uno de los nodos de la malla.

Una característica importante de la malla computacional es que los valores de las coordenadas  $(\xi, \eta)$  para los nodos son valores enteros. De esta forma, una partícula cuyas coordenadas sean  $(\xi_p, \eta_p)$  se encuentra en la celda definida por los cuatro nodos siguientes:  $(j_p, k_p)$ ,  $(j_p + 1, k_p)$ ,  $(j_p, k_p + 1)$ ,  $(j_p + 1, k_p + 1)$  donde  $j_p = Ent(\xi_p)$  y  $k_p = Ent(\eta_p)$  ( $Ent()$  simboliza la función parte entera).

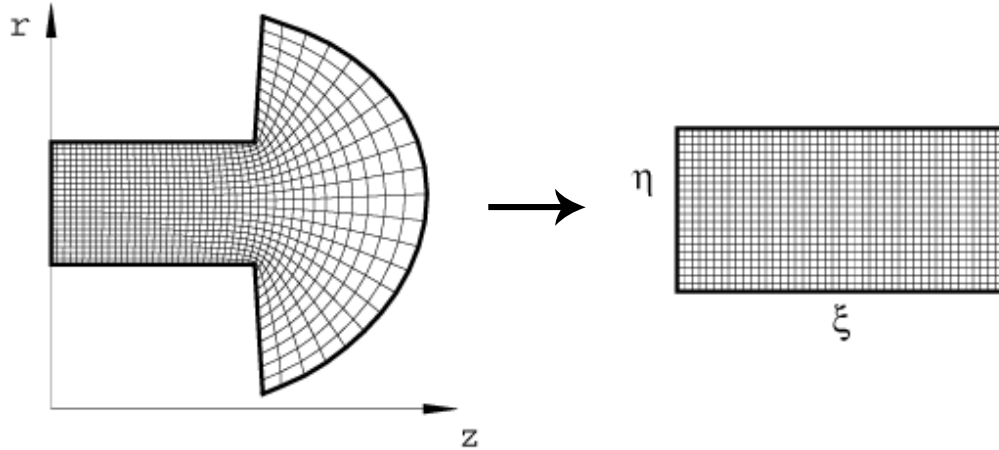


Figura 4.1: Malla no uniforme en el plano  $(z, r)$  y malla uniforme correspondiente en el plano computacional  $(\xi, \eta)$ .

## 4.2. Movimiento de las partículas

En el movimiento de las partículas es necesario tener en cuenta dos fenómenos fundamentales: el movimiento propiamente dicho, que sigue la ley de Newton, y los procesos colisionales. Se describen a continuación los métodos de cálculo del movimiento de las partículas y se deja para una sección posterior el análisis de los procesos colisionales.

La ley de Newton para las macropartículas se puede escribir como sigue:

$$m_p \frac{d^2 \vec{r}_p}{dt^2} = \vec{F}(\vec{r}_p, \vec{v}_p, t) = q_p \left( \vec{E}(\vec{r}_p, t) + \vec{v}_p \times \vec{B}(\vec{r}_p, t) \right) \quad (4.1)$$

donde se ha hecho la hipótesis de que las partículas sólo se ven afectadas por fuerzas eléctricas y magnéticas. Evidentemente, los neutros no se ven afectados por ninguna de estas dos fuerzas por lo que su movimiento está determinado por las colisiones.

El cálculo de la trayectoria de las macropartículas requiere integrar la ley de Newton sucesivamente para obtener velocidad y posición. La integración numérica del movimiento requiere utilizar un paso temporal numérico  $\Delta t$ . En los métodos PIC este paso temporal no suele venir restringido por cuestiones de estabilidad como ocurre habitualmente en los métodos numéricos de resolución de ecuaciones diferenciales, sino que se utiliza el criterio de que una partícula no pueda recorrer más de media celda por paso temporal. Así, para un espaciado de celda típico de 1 mm y un potencial típico para Xenón de 300 V, dicho paso temporal se puede estimar como:  $\Delta t \sim \Delta z / v_{iz} \sim \Delta z / \sqrt{2eV_d / m_i} \sim 5 \cdot 10^{-8} s$ .

En la mayor parte de los métodos de partículas el método numérico usado es el llamado ‘Leapfrog’ pues tiene una precisión bastante adecuada mientras que el coste computacional asociado al mismo es bastante pequeño. Además tiene la propiedad de ser conservativo desde el punto de vista energético lo cual lo convierte en un método muy interesante.

Este método ‘Leapfrog’ consiste en calcular la posición y velocidad desfasadas en el tiempo  $\Delta t/2$ . Eso permite calcular posición y velocidad con un error de truncación de  $O(\Delta t^4)$  y  $O(\Delta t^2)$  respectivamente como se muestra en [10]. Sin embargo en el código de simulación no se tiene en cuenta ese desfase en lo que se refiere a pesado de magnitudes. Esto provoca que el error cometido sea algo mayor de lo que el método ‘Leapfrog’ obtendría en teoría. A pesar

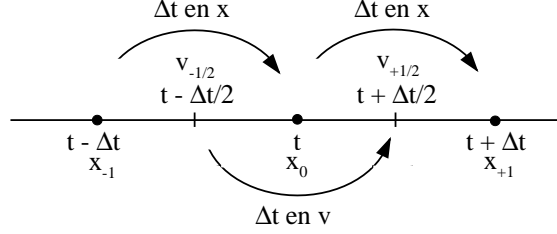


Figura 4.2: Esquema numérico ‘leapfrog’ empleado para resolver el movimiento de las partículas pesadas (iones y neutros).

de ello, tal y como se verá en el capítulo de análisis de actuaciones a través de balances de potencias es posible estimar el error relativo cometido en menos de un 1 % lo cual es aceptable pues existen hipótesis en el modelo que inducen un error semejante.

Un avance importante de Parra en [27] es conseguir que el orden del error antes mencionado se alcance de forma global en el código mediante la consideración de dicho desfase en el pesado. Estos resultados nos han llevado a iniciar la implementación de dichas mejoras en el proceso de pesado. Sin embargo, todavía no se ha terminado de implementar por lo que todos los resultados mostrados en este proyecto corresponden a un método de pesado en el que no se considera este desfase. A pesar de todo ello más adelante se presenta la teoría correspondiente al método de pesado de Parra de [27] pues se espera haber acabado su implementación en breve.

El esquema ‘Leapfrog’ convencional se puede representar de la siguiente forma:

$$\vec{v}_{t+\Delta t/2} \equiv \vec{v}_{+1/2} = \vec{v}_{-1/2} + \Delta t \cdot \vec{F}(\vec{x}_t, t) \quad (4.2)$$

$$\vec{x}_{t+\Delta t} \equiv \vec{x}_{+1} = \vec{x}_0 + \Delta t \cdot v_{+1/2} \quad (4.3)$$

Debido a la geometría cilíndrica de los motores Hall este método se utiliza en HPHall con diversas modificaciones que a continuación se describen.

## 4.2.1. Geometría axilsimétrica

En [27] se muestra como la utilización del método ‘Leapfrog’ para una geometría cilíndrica presenta comete errores numéricos tanto mayores cuanto más cerca del eje está la partícula. Por ello se prefiere utilizar un método presentado en [29] y consistente en la descripción del movimiento en unos ejes intrínsecos a la partícula. En la figura (4.2.1) se representa dicha variante del método ‘Leapfrog’ convencional.

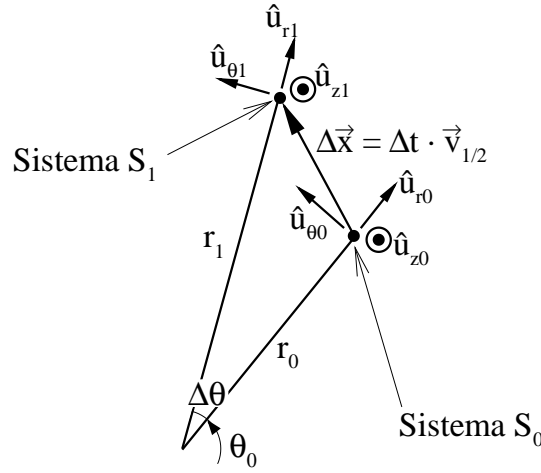


Figura 4.3: Esquema numérico para el movimiento de las partículas en un sistema de referencia cilíndrico. Los vectores unitarios se representan como  $\hat{u}$ . El subíndice 0 es para la posición inicial de la partícula y el subíndice 1 para la posición final. En esta figura los vectores  $\hat{u}_z$  apuntan hacia el lector.

Esta variante resuelve la ecuación de Newton en un sistema inercial ligado a la partícula  $S_0$  definido por la base de vectores  $\hat{u}_{z0}$ ,  $\hat{u}_{r0}$  y  $\hat{u}_{\theta0}$ . De esta forma, tras calcular las velocidades de forma análoga a los algoritmos de (4.2), para el cálculo de la posición se utilizan las siguientes expresiones:

$$\Delta x_r^{(0)} = \Delta t \cdot v_{r,1/2}^{(0)} \quad (4.4)$$

$$\Delta x_\theta^{(0)} = \Delta t \cdot v_{\theta,1/2}^{(0)} \quad (4.5)$$

$$\Delta x_z^{(0)} = \Delta t \cdot v_{z,1/2}^{(0)} \quad (4.6)$$

donde  $\Delta \vec{x}$  es el vector desplazamiento en el sistema de referencia  $S_0$ .

Una vez conocidas la posición y la velocidad en sus respectivos instantes temporales y en el sistema de referencia  $S_0$  es necesario calcular los sistemas de referencia en los instantes  $t + \Delta t$  y  $t + \Delta t/2$ ,  $S_1$  y  $S_{1/2}$  respectivamente y expresar posición y velocidad en dicho sistemas de referencia. En particular, la posición en  $S_1$  se calcula como:

$$r_1 = \sqrt{(r_0 + \Delta x_r^{(0)})^2 + (\Delta x_\theta^{(0)})^2} \quad (4.7)$$

$$\theta_1 = \theta_0 + \Delta\theta = \theta_0 + \arcsin\left(\frac{\Delta x_\theta^{(0)}}{r_1}\right) \quad (4.8)$$

$$z_1 = z_0 + \Delta x_z^{(0)} \quad (4.9)$$

Para el cálculo de la velocidad en el sistema  $S_1$  es necesario hacer uso de una matriz de transformación quedando entonces:

$$\left\{\vec{v}_{1/2}^{(1)}\right\} = [Q_{01}] \left\{\vec{v}_{1/2}^{(0)}\right\}, \quad (4.10)$$

donde

$$[Q_{01}] = \begin{bmatrix} \cos \Delta\theta & \sin \Delta\theta & 0 \\ -\sin \Delta\theta & \cos \Delta\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

Para la velocidad en el sistema  $S_{1/2}$  se usa un método análogo aunque en esta ocasión la matriz de transformación pasa del sistema  $S_1$  al sistema  $S_{1/2}$  y se define a partir de la variable  $\Delta\theta_{1/2}$  que se obtiene como:

$$\Delta\theta_{1/2} = -\arctan \frac{v_\theta^{(1)} \Delta t/2}{r_p^{(1)} - v_r^{(1)} \Delta t/2} \quad (4.12)$$

En [27] se muestra que este método basado en el sistema de referencia inercial mantiene los órdenes de los errores de truncación característicos del método ‘Leapfrog’ convencional mencionados antes. Así pues ésta parece ser la mejor metodología a emplear para el cálculo de la trayectoria de las partículas.

### 4.2.2. Fuerzas para el movimiento de los iones y de los neutros

Como ya se ha señalado anteriormente sobre los neutros no actúa ninguna fuerza, simplemente su trayectoria se ve modificada por colisiones. Por tanto sólo queda por analizar los iones, cuyo movimiento se ve afectado tanto por fuerzas eléctricas como magnéticas. En ocasiones, en modelos fluidos para los iones se suele hacer la hipótesis de que el efecto del campo magnético es despreciable pues el radio de Larmor ( $r = \frac{mv}{eB}$ ) asociado a ellos es grande comparado con la longitud típica del problema. En estos modelos fluidos dicha hipótesis tiende a simplificar el problema. Sin embargo, en un modelo PIC como el del presente proyecto dicha simplificación no es necesaria.

Así pues, para evaluar la fuerza sobre los iones basta con calcular el campo eléctrico y el campo magnético en la posición de la partícula. Sin embargo tanto el campo magnético, que se calcula en tiempo de preproceso, como el campo eléctrico, que se calcula en por diferenciación numérica del potencial eléctrico obtenido a través del modelo de electrones, se conocen en los nodos y no en la posición de la partícula. Para solventar esto se puede utilizar el concepto de pesado de propiedades a la inversa, es decir de los nodos a cada partícula. Con ello el campo magnético y eléctrico en la posición de la partícula se calculan como:

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{x}_p) &= \sum_{(jk)} \vec{E}_{jk} S_{jk}(\vec{x}_p) \\ \vec{B}(\vec{x}_p) &= \sum_{(jk)} \vec{B}_{jk} S_{jk}(\vec{x}_p)\end{aligned}\tag{4.13}$$

donde el subíndice  $jk$  hace referencia al nodo correspondiente.

Este procedimiento puede interpretarse como una mera interpolación lineal del campo pues se está trabajando con funciones de pesado de primer orden.

### 4.2.3. Determinación de $\xi$ y $\eta$ en función de $z$ y $r$

La aplicación del método ‘Leapfrog’ descrito hasta ahora permite calcular la posición en variables  $(z, r)$ . Sin embargo, a la hora de realizar el pesado es necesario conocer la posición en variables  $(\xi, \eta)$ . Por tanto, es necesario transformar unas variables en otras.

La transformación directa de  $(\xi, \eta)$  a  $(z, r)$  viene definida una interpolación bilineal semejantes a las equivalentes a las funciones de pesado que se mostrarán más adelante. Por contra la transformación inversa requiere resolver un sistema de ecuaciones no lineal de la forma:

$$z_p = z(\xi_p, \eta_p) \quad r_p = r(\xi_p, \eta_p) \quad (4.14)$$

La resolución de dicho sistema debe ser más preciso que una mera interpolación lineal pues las partículas no recorren más de media celda por paso temporal, de forma que errores no suficientemente pequeños pueden acumularse a lo largo del movimiento de la partícula por el canal del motor y el chorro exterior. Por otro lado, puesto que esta operación se realiza a cada paso temporal y para cada partícula conviene que el método sea eficiente computacionalmente. El método utilizado puede resumirse en:

- cálculo de una primera estimación de las coordenadas  $(\xi, \eta)$  mediante una linealización del problema:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial r}{\partial \xi} & \frac{\partial r}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \xi_c \\ \Delta \eta_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{p, \text{new}} \\ r_{p, \text{new}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} z_{p, \text{old}} \\ r_{p, \text{old}} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

$$\begin{bmatrix} \xi_p^{(1)} \\ \eta_p^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_{p, \text{old}} \\ \eta_{p, \text{old}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta \xi_c \\ \Delta \eta_c \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

- corrección en caso de que el error cometido excesivo hasta que el error sea menor que una determinada cota (1/50 del tamaño de celda) o el número de correcciones realizadas supere un máximo preestablecido. El error se estima como:

$$E = \sqrt{\left(z_{p, \text{new}} - z(\xi_p^{(1)}, \eta_p^{(1)})\right)^2 + \left(r_{p, \text{new}} - r(\xi_p^{(1)}, \eta_p^{(1)})\right)^2} \quad (4.17)$$



### 4.3. Proceso de pesado en malla no uniforme

En los apartados anteriores se ha mostrado cómo calcular el movimiento de las partículas, así como su posición en el dominio computacional con una precisión adecuada. Por otro lado, ya se ha señalado que el proceso de pesado se hace en la malla computacional pues resulta más sencillo. Así pues queda por definir las funciones de pesado así como algunas características especiales del método utilizado debidas a las propiedades del método ‘Leapfrog’. Todo lo que a continuación se comenta es válido tanto para iones como para neutros.

El proceso de pesado supone ir partícula a partícula y distribuir sus propiedades, tales como masa, cantidad de movimiento, etc. entre los nodos de su entorno en base a las funciones de pesado. En el actual proyecto se emplean funciones de pesado bilineales o de primer orden pues dan buena precisión y requieren poco tiempo de computación. Dichas funciones de pesado se definen para unas coordenadas relativas a la celda en la que se encuentra la partícula y definidas como:

$$\xi_{p,rel} = \xi_p - j_p \quad (4.18)$$

$$\eta_{p,rel} = \eta_p - k_p \quad (4.19)$$

donde  $j_p, k_p$  se calculan según las expresiones del apartado (4.1).

Las funciones de pesado para los cuatro nodos de una celda vienen caracterizadas en función de las variables  $\xi_{rel}$  y  $\eta_{rel}$  de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} S_{j_p, k_p}(\xi_{p,rel}, \eta_{p,rel}) &= (1 - \xi_{p,rel})(1 - \eta_{p,rel}) \\ S_{j_p+1, k_p}(\xi_{p,rel}, \eta_{p,rel}) &= (1 - \xi_{p,rel})\eta_{p,rel} \\ S_{j_p, k_p+1}(\xi_{p,rel}, \eta_{p,rel}) &= \xi_{p,rel}(1 - \eta_{p,rel}) \\ S_{j_p+1, k_p+1}(\xi_{p,rel}, \eta_{p,rel}) &= \xi_{p,rel}\eta_{p,rel} \end{aligned} \quad (4.20)$$

De esta forma una función de pesado global asociada a un nodo  $j, k$  genérico se puede expresar como sigue:

$$S_{jk}(\xi, \eta) = \begin{cases} (1 - |\xi - j|)(1 - |\eta - k|) & \text{para } \xi \in [j - 1, j + 1] \text{ y } \eta_p \in [k - 1, k + 1] \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases} \quad (4.21)$$

Gráficamente la función de pesado interpretada como ligada a cada partícula se representa en la figura 4.3):

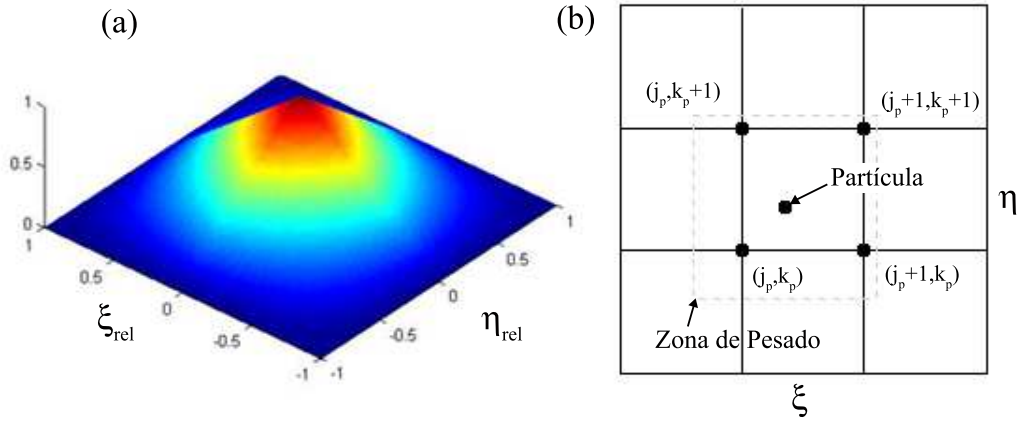


Figura 4.4: (a) función de pesado bilineal y (b) Situación de la partícula con 'zona de pesado'.

Puesto que las funciones de pesado son de primer orden el pesado de una partícula dada sólo afectará a los nodos que definen la celda en la que se encuentra. Esto permite acelerar el proceso de pesado y hacerlo más eficiente computacionalmente. Téngase en cuenta que es precisamente el pesado una de las operaciones más costosas en los métodos de partículas por lo que conviene optimizarlo.

Una vez definidas las funciones de pesado tanto en su versión local como en su versión global (nótese la analogía con el método de elementos finitos) el pesado para la densidad de partículas se puede escribir como para un nodo  $j, k$ :

$$n_{jk,+1} = \frac{1}{\Delta V_{jk}} \sum_{p=\alpha} \frac{m_p}{m_\alpha} S_{jk}(\xi_p, \eta_p) \quad (4.22)$$

En la expresión anterior el volumen de pesado asociado a cada nodo se calcula de la siguiente forma:

$$\Delta V_{jk} = \int_{\Omega_{jk}} 2\pi r S_{jk}(\vec{x}) d\Omega \quad (4.23)$$

con  $\Omega_{jk}$  el dominio del plano físico  $(r, z)$  donde la función de pesado  $S_{jk}(\vec{x}(\xi, \eta))$  no se anula.

En la expresión (4.22) se tiene en cuenta que la posición de las partículas se conoce en el instante temporal  $t + \Delta t$ , por lo que la densidad calculada es la de dicho instante.

Para el cálculo del volumen de pesado de cada nodo es necesario utilizar la transformación del plano computacional al físico complicando en cierta medida las integrales anteriores. Afortunadamente, puesto que la malla no varía durante la ejecución del programa esto se puede hacer en tiempo de preproceso. Los dominios de integración asociados a los nodos del interior del motor así como los correspondientes a las paredes del mismo se muestran gráficamente en la figura (4.3).

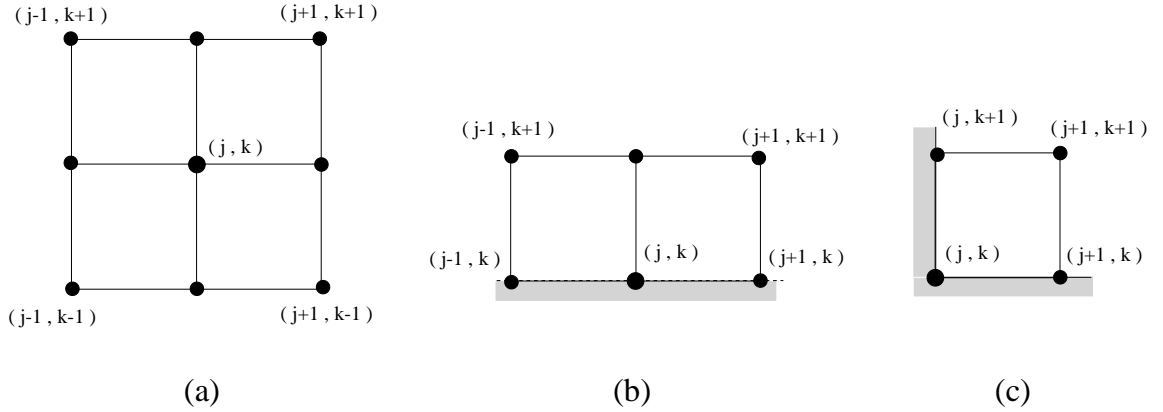


Figura 4.5: Diferentes dominios de integración para obtener  $\Delta V_{jk}$ : (a) nodo interior, (b) nodo en el borde, y (c) nodo en una esquina.

El proceso de cálculo de flujos viene fuertemente afectado por el hecho de que la posición de la partícula es obtenida en el instante  $t + \Delta t$  mientras que su velocidad se conoce para el instante  $t + \Delta t/2$ . Esto provoca que se haya de tener especial cuidado a la hora de pesar variables relacionadas con la velocidad y la posición de las partículas.

En [27] se propone un método que permite salvar estos problemas aunque tiene el problema de suponer un coste computacional ligeramente superior y una implementación más compleja. Dicho método está siendo implementado por los autores del proyecto por lo que la disminución de errores que se consigue con él (ver [27]) será esperable en el nuevo código. A continuación se describe dicho procedimiento aunque todavía no ha sido implementado por completo.

Para poder calcular de una forma coherente el flujo de partículas, que envuelve tanto posición como velocidad, es necesario conocer la posición de la partícula en el instante  $t + \Delta t/2$  en el plano computacional. Para ello se utiliza una mera interpolación lineal entre los instantes temporales  $t$  y  $t + \Delta t$  como sigue:

$$\xi_{p, +1/2} = \frac{\xi_{p, +1} + \xi_{p, 0}}{2} \quad \eta_{p, +1/2} = \frac{\eta_{p, +1} + \eta_{p, 0}}{2} \quad (4.24)$$

Por otro lado también es necesario conocer en dicho instante la masa de la partícula, que varía a lo largo del tiempo como se verá al describir los procesos colisionales. Para ello también se utiliza una expresión similar a las anteriores.

Conocidos la masa, posición y velocidad de todas las partículas en el instante  $t + \Delta t/2$  y en el sistema de referencia correspondiente es posible calcular por pesado el flujo de partículas para dicho instante como sigue:

$$\vec{g}_{jk, +1/2} = \frac{1}{\Delta V_{jk}} \sum_p \frac{m_{p, +1/2}}{m_\alpha} \vec{v}_{p, +1/2}^{(1/2)} S_{jk}(\xi_{p, +1/2}, \eta_{p, +1/2}) \quad (4.25)$$

A partir de dicho flujo de partículas es posible calcular la velocidad promedio dividiendo por la densidad correspondiente a ese mismo instante temporal. Así, el proceso queda en la forma:

$$n_{jk, +1/2} = \frac{1}{\Delta V_{jk}} \sum_{p=\alpha} \frac{m_{p, +1/2}}{m_\alpha} S_{jk}(\xi_{p, +1/2}, \eta_{p, +1/2}) \quad (4.26)$$

$$\vec{u}_{jk, +1/2} = \frac{\vec{g}_{jk, +1/2}}{n_{jk, +1/2}}$$

Con esto quedan calculados la densidad de partículas, flujo de partículas y velocidad promedios de una manera consistente, a diferencia de cómo lo hacía Fife en [28] donde no se tenía en cuenta el desfase temporal entre posición y velocidad de las partículas a la hora de los procesos de pesado. Esto provocaba importantes errores numéricos como quedó demostrado en [27] que se pueden evitar con el procedimiento aquí descrito.

Como ya se comentó en el capítulo 2, el procedimiento de pesado permite calcular multitud de variables macroscópicas medias de interés como pueden ser la presión, temperatura, flujo de energía total, etc. Las expresiones son análogas a las utilizadas para el flujo y densidad de partículas y fueron introducidas en el capítulo 2, por lo que no se recogen de nuevo en este apartado. Simplemente se ha de utilizar consistentemente la información de la que se dispone en lo que ha instantes temporales se refiere.

#### 4.4. Colisiones inelásticas: ionización y recombinación

Existen dos procesos colisionales inelásticos importantes en plasmas. La ionización y la recombinación de partículas que suponen la ganancia o pérdida de carga eléctrica positiva por parte de la partícula pesada debido a una colisión con un electrón. Como se verá más adelante la recombinación es despreciable frente a la ionización para el flujo de plasma en los motores Hall. Así pues sólo es necesario considerar la ionización.

La manera de modelar la ionización cuando se trabaja en métodos de partículas presenta dos opciones ya explicadas en el capítulo 2: MCC y DSMC. Debido a las características de los motores Hall y de la manera de manejar las distintas especies, el método MCC parece la mejor opción aunque debe ser adaptado.

La razón de tener que modificar el método MCC convencional es que los macro-neutros son partículas de una masa muy superior a la de los macro-iones, por lo que no se puede transformar un macro-neutro en un solo macro-ión. Es necesario que los neutros tengan una masa variable que pierden por ionización en su movimiento por el dominio computacional. Para poder considerar los iones dobles, algo similar a lo anterior ocurre con los iones simples, es decir, a medida que se mueven por el canal van perdiendo masa por ionización doble. Sin embargo, los iones dobles son de mucha menor masa que los simples con lo que es necesario que los primeros sean considerados como una especie aparte.

Por otro lado gracias a que los electrones son modelados como un fluido, la temperatura de electrones es conocida en el momento de calcular la tasa de ionización lo cual facilita el método. Así es posible estimar la cantidad de masa a ionizar en cada punto del dominio.

Este proceso de ionización ha de actuar sobre las distintas especies de neutros y de iones simples y dobles de forma diferente. Para los primeros supone la eliminación de masa de los macro-neutros, mientras que para los segundos supone la creación de nuevos macro-iones simples así como la pérdida de masa de los mismos por ionización doble. Finalmente, para los iones dobles el único proceso a tener en cuenta es el de creación de macro-iones dobles. Por todo ello estos fenómenos son modelados por algoritmos diferentes.

#### 4.4.1. Análisis de la ionización: producción de iones

El proceso de ionización supone una transformación de unas especies a otras, en particular, para la ionización simple, de neutros a iones simples. Sin embargo, desde el punto de vista de las macropartículas, los macro-neutros tienen una masa dos órdenes de magnitud superior a la de los macro-iones. Por ello, la ionización no puede ser modelada como la transformación de un macro-neutro en un macro-ión.

Para modelar correctamente el proceso, se ha de calcular la cantidad de masa a ionizar en los nodos de la simulación en base a las variables macroscópicas en dichos nodos y a través de ajustes experimentales de las secciones efectivas para la ionización. Así, la cantidad de neutros ionizados por unidad de tiempo por colisiones con electrones ( $\dot{n}_{i+}$ ) es:

$$\dot{n}_{i+} = n_n \int_{\sqrt{\frac{2\epsilon_i}{m_e}}}^{\infty} f_e(v_e) v_e^3 4\pi \sigma_{i+}(v_e) dv_e \quad (4.27)$$

En dicha ecuación se ha supuesto que la velocidad de los neutros es despreciable frente a la de los electrones, lo cual es muy razonable y además la integración en el espacio de velocidades sólo se realiza para aquellos electrones con una energía capaz de producir la ionización, esto es, superior a la primera energía de ionización del gas considerado ( $\epsilon_i$ ).

El modelo experimental para la sección efectiva de ionización es presentado en [37] como:

$$\sigma_{i+} = 2,66\pi a_0^2 \beta_1 \left( \frac{\epsilon_i^H}{\epsilon_i} \right)^2 \xi g(u), \quad \text{con} \quad g(u) = \frac{u-1}{u^2} \ln(1,25\beta_2 u) \quad (4.28)$$

donde  $u = \epsilon/\epsilon_i$  es la energía adimensional del electrón,  $\epsilon_i^H$  es la energía de ionización del hidrógeno,  $\xi$  es el número equivalente de electrones en la capa exterior, y  $\beta_1$  y  $\beta_2$  son constantes del modelo determinadas experimentalmente. Los valores de dichas constantes para Argón y Xenón se muestran en la tabla (4.1).

	$\beta_1$	$\beta_2$	$Q \text{ (m}^3\text{s}^{-1}\text{)}$
Argón	0,82	1,00	$2,77 \cdot 10^{-13}$
Xenón	1,00	0,80	$4,13 \cdot 10^{-13}$

Cuadro 4.1: Constantes para el modelo de ionización de Drawin con una distribución de electrones maxwelliana.

Si se supone una distribución maxwelliana tridimensional isótropa como la presentada en el capítulo 2 para los electrones se puede poner:

$$\dot{n}_{i+} = n_e n_n \zeta_{\text{Xe} \rightarrow \text{Xe}^+}(T_e), \quad (4.29)$$

con

$$\zeta_{\text{Xe} \rightarrow \text{Xe}^+}(T_e) = Q \beta_1 \frac{1}{\theta^{3/2}} \int_1^\infty \exp\left(-\frac{u}{\theta}\right) \frac{u-1}{u} \ln(1,25\beta_2 u) du. \quad (4.30)$$

En las expresiones anteriores  $\theta$  es  $\theta = kT_e/\epsilon_i$ , y  $Q$  es una constante que se puede obtener a partir del resto constantes del modelo y cuyo valor está recogido en la tabla 4.1. La función  $\zeta_{\text{Xe} \rightarrow \text{Xe}^+}(T_e)$  viene representada para el Xenón en la figura 4.6b).

Por otro lado es necesario considerar la generación de iones dobles por los siguientes procesos de ionización:

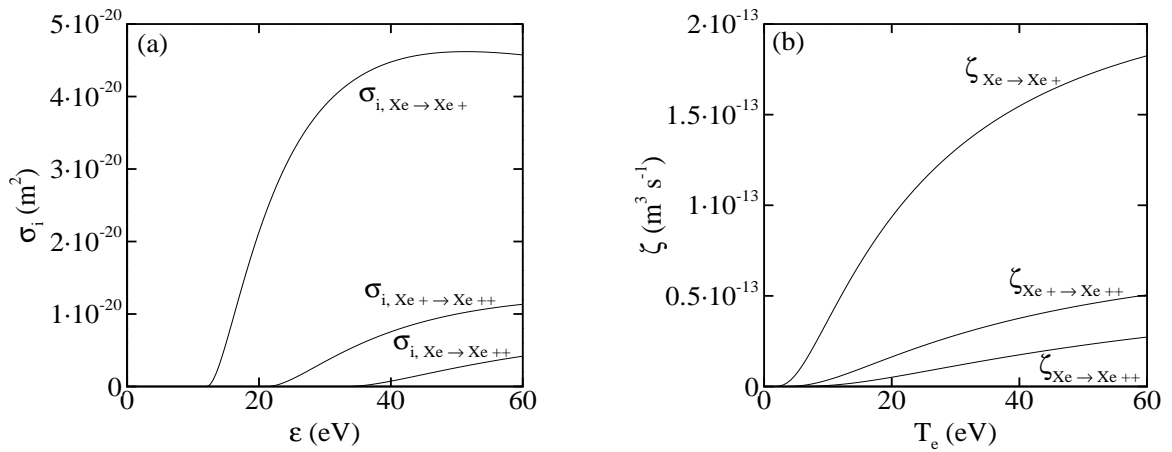


Figura 4.6: (a) Sección efectiva de la ionización ( $\sigma_i$ ) frente a la energía del electrón ( $\epsilon$ ). (b) Función  $\zeta(T_e)$  que describe la dependencia de  $\dot{n}_i$  con la temperatura de electrones.



En este caso la cantidad de iones dobles generados por unidad de tiempo y volumen se puede calcular como:

$$\dot{n}_{i++} = n_e n_n \zeta_{\text{Xe} \rightarrow \text{Xe}^{++}}(T_e) + n_e n_{i+} \zeta_{\text{Xe}^+ \rightarrow \text{Xe}^{++}}(T_e) \quad (4.33)$$

donde  $n_{i+}$  representa la densidad de iones simples y las funciones  $\zeta_{\text{Xe}^+ \rightarrow \text{Xe}^{++}}(T_e)$  y  $\zeta_{\text{Xe} \rightarrow \text{Xe}^{++}}(T_e)$  son los equivalentes a la función de ionización del modelo de ionización simple  $\zeta_{\text{Xe} \rightarrow \text{Xe}^+}(T_e)$ . Estas funciones pueden obtenerse de forma análoga a la anterior a partir de los modelos de Mathur y Badrinathan en [48] y Fife en [28]. Los resultados obtenidos de aplicar dichos modelos se muestran en la figura 4.6b).

Algunos comentarios interesantes son:

- la sección efectiva asociada a los procesos de generación de iones dobles son mucho menores que la de iones simples salvo a temperaturas elevadas. Como consecuencia de ello algo similar ocurre con las funciones  $\zeta_i(T_e)$ .
- la densidad de iones simples es mucho menor que la de neutros y por tanto el efecto neto de la ionización  $\text{Xe}^+ \rightarrow \text{Xe}^{++}$ , a priori, es pequeño, frente a las otras dos. Sin embargo, el proceso de ionización  $\text{Xe} \rightarrow \text{Xe}^{++}$  a relativamente alta temperatura tiene su importancia pues depende de la densidad de neutros y de la de electrones al igual que la ionización simple. Los resultados del presente modelo tienden a mostrar que los iones dobles generados por cualquiera de los dos procesos anteriores pueden tener un peso relativo del 5 % para un motor convencional y mayor si se habla de motores de alto impulso específico, de ahí su importancia.

Debe destacarse que a la hora de implementar dichos modelos en HPHall se hace uso de tablas generadas en tiempo de preproceso. Con ello se consigue ahorrar el tiempo asociado a la evaluación de los valores de las funciones  $\zeta_i(T_e)$  que suponen evaluar integrales con el consiguiente coste computacional adicional. El número de puntos asociado a la tabla es lo suficientemente elevado como obtener una precisión adecuada.

#### 4.4.2. Análisis de la recombinación

Otro proceso colisional de interés en plasma es el de recombinación por el que un ión y un electrón colisionan dando lugar a un neutro. En el caso de motores Hall este fenómeno es despreciable frente a la ionización como se muestra a continuación.

En [37] Mitchner y Krueger proponen el siguiente modelo para la recombinación de iones en el interior del plasma:

$$\dot{n}_r = \alpha_r n_e n_{i+}, \quad (4.34)$$

donde

$$\alpha_r = 1,09 \cdot 10^{-20} n_e T_e^{-9/2} \text{ m}^3/\text{s}. \quad (4.35)$$

En la expresión anterior la densidad de las distintas especies aparece en partículas/ $m^3$  y la temperatura en  $K$ .

Si se toma como valores típicos para la densidad de electrones  $10^{17}$ (partículas/ $m^3$ ), para la densidad de neutros  $10^{19}$ (partículas/ $m^3$ ) y para la temperatura de electrones 15 eV se obtiene una primera estimación de la cantidad de iones recombinados de  $\dot{n}_r \sim 3 \cdot 10^9$ (partículas  $m^{-3}/s$ ) que es despreciable frente a una ionización de  $\dot{n}_i \sim 7 \cdot 10^{22}$ (partículas  $m^{-3}/s$ ).

En cuanto a la recombinación de iones dobles ya se observa que puesto que ésta depende de la densidad de los mismos, que es mucho menor que la de los iones simples, dicho proceso es también despreciable.

Resulta pues razonable no incluir dicho efecto con la consiguiente disminución de tiempo de computación. En cualquier caso el código está preparado para poder modelizar dicho fenómeno.

Finalmente debe señalarse que este proceso de recombinación de partículas en el interior del plasma es distinto del proceso de recombinación en las paredes del motor. Éste último será analizado más adelante en el capítulo de interacción plasma-pared pero puede decirse sobre él que tiene una gran importancia en el funcionamiento del motor a través de las pérdidas de energía hacia las paredes.

### 4.4.3. Influencia sobre las macropartículas

Una vez caracterizado el proceso de ionización desde un punto de vista macroscópico es necesario tener en cuenta sus efectos sobre las macropartículas tanto iónicas como neutras. El análisis de su influencia sobre los electrones se deja para el capítulo 5, aunque cabe señalar que el efecto fundamental para ellos es de una pérdida energética debida a la ionización y otros efectos como radiación.

A continuación se describen los modelos de eliminación y adicción de masa o partículas a las distintas especies. Estos dos procesos deben ser asimétricos debido a la diferencia de masa existente entre dichas macropartículas, pero deben ser conservativos en masa y energía.

#### Eliminación de masa de los macro-neutros y de los macro-iones simples

A continuación se presenta el modelo de eliminación de masa de los macro-neutros debido a ionización simple aunque la influencia de la ionización doble sobre éstos y los macro-iones simples se calcula de forma análoga. Debido a su elevada masa la única manera posible en HPHall de modelar la ionización desde el punto de vista de los macro-neutros consiste en utilizar partículas de masa variable. De esta forma en su movimiento a lo largo del canal los macro-neutros van perdiendo masa hasta que ésta es inferior a una determinada cota momento en el cual la partícula es ionizada por completo.

La manera de evaluar la cantidad de masa perdida por un macro-neutro en un paso temporal  $\Delta t$ ,  $\Delta m_n$ , es propuesta por Parra en [27] como:

$$\Delta m_{pn,1/2} = - \int_t^{t+\Delta t} \frac{\dot{n}_{i+}(\xi_{pn}(\tau), \eta_{pn}(\tau); \tau)}{n_n(\xi_{pn}(\tau), \eta_{pn}(\tau); \tau)} m_{pn}(\tau) d\tau \cong - \frac{\dot{n}_{i+}(\xi_{pn,1/2}, \eta_{pn,1/2}; t)}{n_n(\xi_{pn,1/2}, \eta_{pn,1/2}; t)} m_{pn,0} \Delta t \quad (4.36)$$

donde  $\xi_{pn}(t)$  y  $\eta_{pn}(t)$  representan la trayectoria de la macro-partícula neutra. Obsérvese las variables macroscópicas necesarias se evalúan en el instante temporal  $t$  lo cual simplifica el algoritmo.

De esta forma la masa del macro-neutro en el instante  $t + \Delta t$  se estima como:

$$m_{pn,+1} = m_{pn,0} + \Delta m_{pn,1/2} \quad (4.37)$$

### Generación de macro-iones simples y dobles

A continuación se explica el algoritmo de generación de macro-iones simples aunque con pequeños cambios es aplicable a la ionización doble.

En el proceso de creación de macro-iones, su masa no se fija a un valor determinado sino que es el resultado de la aplicación de algoritmo probabilístico. De esta forma, dentro del dominio computacional se pueden encontrar macro-iones de muy distinta masa.

Éste es uno de los aspectos que han sido modificados en el presente proyecto permitiendo un mayor control sobre el número de partículas por celda y en general del número de partículas total optimizando el coste computacional asociado al código de partículas. Con ello se obtienen resultados con menores oscilaciones estadísticas debidas al método de partículas.

La creación de macro-iones es del tipo MCC, es decir, se realiza en base a un algoritmo probabilístico consistente en lo siguiente:

- a cada celda se le asigna una probabilidad de crear macropartículas ( $P_{jk}$  donde  $jk$  representan el nodo inferior izquierdo de la celda). Este valor puede depender de distintos parámetros de la celda o mantenerse constante en 0.5. En este proyecto depende linealmente de la tasa de ionización, salvo que el número de partículas en la celda sea demasiado bajo o demasiado alto, en cuyo caso se modifican las leyes para crear más o menos partículas respectivamente.
- en el caso habitual a cada celda se le asigna una masa típica de las partículas a crear,  $m_{pi+,jk}$ , como media de las masa de las partículas preexistentes en la celda. Si el número de partículas es demasiado bajo (inferior a una determinada cota) a la celda se le asigna un número  $N_{jk}$  igual a la diferencia entre la cota y el número existente de partículas. Si el número de macro-iones es demasiado alto se obliga a que  $N_{jk}$  sea igual a uno.
- a partir de aquí hay dos posibles opciones en el algoritmo. Si se conocen  $N_{jk}$  y  $P_{jk}$  se calcula el número de macropartículas que serán sometidas al método probabilístico como la parte entera del cociente entre las dos variables anteriores como:

$$N_{jk_{max}} = Ent(N_{jk}/P_{jk})$$

Por contra, si se conocen  $m_{pi+,jk}$  y  $P_{jk}$  el número  $N_{jk_{max}}$  se calcula de forma que la cantidad de masa creada se corresponda con la que se predice macroscópicamente con la ecuación (4.40). La masa a ionizar en una celda viene dada por la expresión:

$$(\Delta m_{i+})_{\text{celda}_{jk}} = \int_{t-\Delta t}^t d\tau \left( \int \int \int_{\Omega_{\text{celda}_{jk}}} m_i \dot{n}_{i+}(\xi, \eta; \tau) d\Omega \right) \cong m_i \langle \dot{n}_{i+} \rangle_{t-\Delta t} \Delta V_{\text{celda}_{jk}} \Delta t \quad (4.38)$$

donde  $\Delta V_{\text{celda}_{jk}}$  es el volumen de la celda cuyo nodo inferior izquierdo es el nodo  $j, k$  y  $\langle \dot{n}_{i+} \rangle$  es un valor medio de la ionización en la celda, calculado como:

$$\langle \dot{n}_{i+} \rangle = \frac{(\dot{n}_{i+})_{jk} + (\dot{n}_{i+})_{j+1,k} + (\dot{n}_{i+})_{j,k+1} + (\dot{n}_{i+})_{j+1,k+1}}{4} \quad (4.39)$$

Según la anterior descripción se puede obtener la siguiente relación:

$$m_{pi+,jk} N_{jk_{max}} P_{jk} = (\Delta m_{i+})_{\text{celda}_{jk}} = m_i \langle \dot{n}_{i+} \rangle_{t-\Delta t} \Delta V_{\text{celda}_{jk}} \Delta t \quad (4.40)$$

donde  $m_{pi+,jk}$  representa la masa de cada macro-ión a crear en la celda  $jk$ .

- a continuación se calculan  $N_{jk_{max}}$  números aleatorios entre cero y uno para cada celda, de forma que la cantidad de dichos números aleatorios que queden por encima de la probabilidad de la celda  $P_{jk}$  representa el número real de macro-iones a crear en dicha celda. Nótese que en media y tras muchas iteraciones el número de partículas creadas viene dado por el producto  $N_{jk_{max}} P_{jk}$  y que  $N_{jk_{max}}$  representa el número máximo de partículas que se podrían crear en la celda  $jk$  en un paso temporal  $\Delta t$ .

Finalmente, de la expresión (4.40) se puede despejar la masa de los macro-iones a crear en la celda  $jk$  como:

$$m_{pi+,jk} = \frac{(\Delta m_{i+})_{\text{celda}_{jk}}}{N_{jk_{max}} P_{jk}}$$

La ventajas de dicho método con respecto al método original son fundamentalmente:

- todos los macro-iones que se intentan crear en una celda ( $N_{jk_{max}}$ ) son sometidos al algoritmo probabilístico. En las versiones anteriores del código ([27]) se utilizaban métodos que no verificaban esta propiedad, lo que va en contra de las bases de los métodos MCC.
- en vez de crear una sola partícula por celda, permite seleccionar el número mínimo deseado de forma que se consigue evitar que haya celdas sin partículas. Esto era un problema bastante grave en la zona cercana al ánodo y en parte de las paredes laterales del motor en el modelo anterior.
- permite poner un máximo al número de partículas por celda de forma que se puede evitar que haya celdas con un número demasiado elevado de partículas. En la zona del chorro exterior tendían a crearse partículas en exceso lo cual se consigue evitar con el nuevo algoritmo.

En definitiva, este nuevo método permite controlar de una forma mucho más adecuada el número de partículas por celda. En la métodos PIC un número bastante adecuado para evitar las oscilaciones estadísticas es 30 partículas por celda. Un valor muy por encima de ése provocaría un aumento excesivo del coste computacional y un valor muy por debajo provocaría que apareciesen oscilaciones estadísticas no reales. Gracias al nuevo método se consigue mantener una media de entre 20 y 40 partículas en todas las celdas lo cual es bastante aceptable, todo ello sin haber cambiado el fundamento probabilístico de los métodos MCC.

Una vez conocida la masa y el número de macro-iones a introducir, se debe determinar la posición relativa en la celda y la velocidad de los mismos. La posición se determina a partir de dos números aleatorios entre cero y uno que representan las coordenadas  $(\xi_{rel}, \eta_{rel})$  relativas a la celda y la velocidad se toma aleatoriamente de una distribución maxwelliana de neutros con velocidad media  $\vec{u}_n$  y temperatura  $T_n$  pues se supone que la cantidad de movimiento de la partículas no se ve modificada apreciablemente por la colisión ionizante.

## 4.5. Colisiones elásticas

Dentro de los muy diversos tipos de colisiones elásticas que pueden tener lugar en el plasma, son de especial importancia las colisiones ión-neutro.

Las colisiones ión-neutro se pueden descomponer en dos tipos de colisiones fundamentalmente: colisiones de pequeño ángulo y colisiones con intercambio de carga o también llamadas CEX (Charge Exchange Collisions). Las primeras suponen el intercambio de cantidad de movimiento entre el ión y el neutro que sufren la colisión, mientras que las segundas suponen el intercambio de carga entre el ión y el neutro, dando lugar a un ión de baja velocidad y un neutro de alta velocidad.

De especial interés para el análisis de la interacción del motor con el resto de la astronave son los iones de baja velocidad que aparecen como consecuencia de las colisiones CEX. Estos iones no son capaces de superar la barrera potencial a la salida del canal y tienden impactar con las distintas superficies de la astronave, en particular, sobre los paneles solares provocando el deterioro de los mismos.

Hoy en día existen muchos códigos de chorro y de interacción con la astronave que son capaces de modelar estos fenómenos. Sin embargo, su principal problema reside en que no conocen con la precisión adecuada la distribución de velocidades de iones y otras propiedades a la salida del canal. Es ahí donde entran en juego códigos de simulación como HPHall que permiten calcular la información de entrada a los modelos de chorro.

En este proyecto se recogen los modelos desarrollados por Fife y Parra para las versiones anteriores y que se basan en las características de los métodos MCC para reproducir los efectos colisionales. Gracias a que se distingue claramente entre los dos tipos de colisiones antes comentados es posible desarrollar métodos particulares para cada caso haciendo más eficiente el modelo.

#### 4.5.1. Colisiones de pequeño ángulo. Modelo fluido de colisiones

El efecto fundamental de estas colisiones es el intercambio de cantidad de movimiento entre las partículas. A pesar de que se trata de un modelo de partículas, al tratarse de una metodología MCC no se puede pretender evaluar las posibles colisiones entre macro-iones y macro-neutros. Sin embargo, se puede emplear una metodología de tipo fluido introduciendo una fuerza adicional sobre las partículas consecuencia de las colisiones. Este modelo permite evaluar la fuerza por unidad de masa de un modo fluido en la forma:

$$\frac{F_{pi,col}}{m_{pi}} = -n_n \langle \sigma_i \| \vec{v}_i - \vec{v}_n \| \rangle (\vec{u}_i - \vec{u}_n) \quad \frac{F_{pn,col}}{m_{pn}} = -n_i \langle \sigma_{in} \| \vec{v}_i - \vec{v}_n \| \rangle (\vec{u}_n - \vec{u}_i) \quad (4.41)$$

donde  $\langle \rangle$  indica promedio en la distribución de velocidades.

Las ecuaciones anteriores permiten evaluar la fuerza por unidad de masa sobre iones y neutros respectivamente. Se trata obviamente de un modelo simplificado pero que permite estimar de manera sencilla un efecto que de otro forma sería costoso modelar. Al ser un modelo aproximado no es necesario conocer la sección efectiva de colisión con exactitud sino que se puede utilizar un valor constante como  $\sigma_{in} = \text{cte.} = 3 \cdot 10^{-19} \text{ m}^2$  tomado de [51]. Por otro lado no se tendrá en cuenta la dispersión de la velocidad de las partículas con lo que se desprecia la temperatura de neutros e iones. Con esto se tiene que las ecuaciones anteriores pasan a ser de la forma:

$$\frac{F_{pi,col}}{m_{pi}} = -n_n \sigma_{in} \| \vec{u}_i - \vec{u}_n \| (\vec{u}_i - \vec{u}_n) \quad \frac{F_{pn,col}}{m_{pn}} = -n_i \sigma_{in} \| \vec{u}_i - \vec{u}_n \| (\vec{u}_n - \vec{u}_i) \quad (4.42)$$

A través de las magnitudes pesadas en los nodos es posible calcular los valores de estas fuerzas por unidad de masa, para posteriormente interpolar a la posición de cada partícula y multiplicarla por su masa. De esta forma se puede evaluar el efecto de estas colisiones a través de una fuerza efectiva a incluir en la ecuación de Newton que describe el movimiento de cada macro-partícula. En este caso, la fuerza no depende de la velocidad de las partículas (aunque sí de la velocidad media de las distintas especies) con lo que se puede tratar de un modo análogo a la fuerza eléctrica.



#### 4.5.2. Colisiones de gran ángulo. Colisiones de intercambio de carga

Debido a su mayor interés este fenómeno se modela de una forma más precisa modificando las propiedades de las macropartículas de una forma similar a como se hace para la ionización. Para ello se define una probabilidad de colisión CEX de la forma:

$$P_{cx} = 1 - \exp(-n_n \sigma_{cx}(\|\vec{u}_i - \vec{u}_n\|) \|\vec{u}_i - \vec{u}_n\| \Delta t) \quad (4.43)$$

donde  $\vec{u}_i$  es la velocidad media de los iones,  $\vec{u}_n$  es la velocidad media de los neutros y  $\sigma_{cx}(v)$  es la sección efectiva de colisión en función de la diferencia de velocidades.

En primer lugar se evalúa dicha probabilidad en los nodos a través de las variables pesadas del método PIC y posteriormente se hace uso de una interpolación lineal para conocer el valor asociado a cada partícula. De nuevo, en la expresión anterior se desprecia el efecto de la dispersión de las partículas en el dominio de velocidades. Esto se fundamenta en que la velocidad de los neutros es pequeña frente a la de los iones y en que la temperatura de iones no es excesiva.

Finalmente para evaluar si una determinada partícula sufre una colisión CEX basta comparar su valor correspondiente de  $P_{cx}$  con un número obtenido aleatoriamente. En caso afirmativo se procede a modificar las propiedades de la partícula como se describe a continuación.

#### Efecto sobre los iones

En la realidad una colisión CEX da lugar a un ión de baja velocidad. Sin embargo, debido a la masa tan diferente de macro-iones y macro-neutros usados en HPHall, el proceso es más complicado y ha de hacerse de forma similar a la ionización. Es decir desde el punto de vista de los macro-iones, si uno de ellos sufre una colisión CEX, su nueva velocidad debe tomarse de una distribución local maxwelliana de neutros con velocidad media  $\vec{u}_n$  y temperatura  $T_n$ . Ello es debido a que la colisión se calcula como de un macro-ión contra un fondo fluido de neutros.

### Efecto sobre los neutros

Para considerar el efecto de las colisiones CEX sobre los neutros hay dos posibilidades: hacerlo de forma fluida, más imprecisa, o siguiendo un método análogo al de la ionización.

En el primer caso, basta con calcular una fuerza efectiva a incluir en la ecuación del movimiento de forma similar a como se hace con las colisiones de pequeño ángulo.

En el otro caso, es necesario actuar directamente sobre las macro-partículas de dos formas bien diferenciadas: generando macro-neutros de alta velocidad y eliminando masa de los macro-neutros que sufren la colisión. De esta forma se reproduce la aparición de neutros de alta velocidad que mantienen gran parte de la cantidad de movimiento que tenía el ión antes del intercambio de carga.

En cualquier caso, a pesar de que los efectos sobre macro-iones y macro-neutros son asimétricos es necesario verificar que los algoritmos son conservativos en masa y energía, tal y como se hace para la ionización.

En base a lo anterior, para cada macro-neutro se calcula la cantidad de masa a eliminar (transformar en iones) de la forma:

$$\begin{aligned}
 (\Delta m_{pn})_{cx,1/2} &= \int_t^{t+\Delta t} n_i \|\vec{u}_i - \vec{u}_n\| \sigma_{cx}(\|\vec{u}_i - \vec{u}_n\|) \Big|_{(\xi_{pn}(\tau), \eta_{pn}(\tau); \tau)} m_{pn}(\tau) d\tau = \\
 &= -n_i \|\vec{u}_i - \vec{u}_n\| \sigma_{cx}(\|\vec{u}_i - \vec{u}_n\|) m_{pn,0} \Delta t + O(\Delta t^2)
 \end{aligned} \tag{4.44}$$

Por otro lado, cuando se cambia la velocidad de los macro-iones se debe generar un macro-neutro de velocidad y masa iguales a la del macro-ión antes de la colisión.

Este último aspecto es uno de los puntos débiles del modelo pues supone la creación de macro-neutros de masa muy inferior a la del resto de macro-neutros que no proceden de una colisión. Una manera más adecuada de hacerlo sería acumular la masa de macro-neutros a generar y finalmente con un algoritmo probabilístico generar un macro-neutro de masa similar a la de los demás y con una velocidad tomada de una distribución maxwelliana de iones.

Por esta razón todos los resultados que se presentan en el presente proyecto no consideran las colisiones CEX ni de pequeño ángulo a falta de mejorar el método actual y actualizarlo para considerar la influencia de iones dobles.

## 4.6. Inyección de masa

La simulación de la inyección de masa se realiza introduciendo un cierto número de partículas neutras en la superficie correspondiente al inyector.

Para ello basta conocer el flujo másico del inyector  $\dot{m}_{inj}$ , que por simplicidad se supondrán constante durante todo el proyecto, y el número de macro-neutros que se desea introducir por cada paso temporal  $N_{inj}$ .

Para mantener constante el flujo inyectado es necesario considerar la pérdida de masa de partículas en la superficie del inyector en cada instante temporal ( $\Delta m_{perd}$ ).

Por otro lado, la variable  $N_{inj}$  permite controlar el tiempo de llenado del dominio computacional y la masa de los macro-neutros a inyectar. Así, cuanto mayor sea el número de celdas de la malla, mayor debería ser  $N_{inj}$  para asegurar que el tiempo físico de llenado del dominio se mantiene constante.

A partir de las consideraciones anteriores la masa de cada macro-neutro inyectado es:

$$m_{pn} = \frac{\dot{m}_{inj}\Delta t + \Delta m_{perd}}{N_{inj}} \quad (4.45)$$

Conocida la masa de cada macro-neutro a inyectar falta por definir la velocidad y la posición del mismo. La posición se calcula de forma aleatoria sobre la superficie del inyector. En cuanto a la velocidad se toma aleatoriamente de una distribución de velocidades que representa un flujo axial de temperatura  $T_{inj}$  y de velocidad media sónica  $u_{inj} = \sqrt{(5kT_{inj})/(3m_i)}$  y que a continuación se describe.

La función de distribución no puede ser una maxwelliana exactamente pues ha de representar un cierto flujo. Por ello, en [29] se propone un método bastante adecuado consistente en factorizar la función de distribución en dos términos: uno dependiente de la velocidad contenida en plano del inyector ( $\vec{v}_t$ ) y que sigue una maxwelliana bidimensional, y otro dependiente de la velocidad normal al inyector ( $v_n$ ) y que sigue una semimaxwelliana. De esta forma la función de distribución queda como el producto de una constante (dependiente de la densidad local) y de dos funciones de distribución. Para conocer este método con más detalle se sugiere acudir a [27].

## 4.7. Condiciones de contorno para las partículas

A continuación se describen las distintas condiciones de contorno para el movimiento de las partículas. De especial interés es la interacción con las paredes cerámicas y metálicas del motor.

### 4.7.1. Tipos de contorno

En el caso más general, la malla con la que trabaja HPHall puede tener los siguientes tipos de contorno (ver figura 4.7).

- inyector.
- eje de simetría.
- vacío.
- paredes cerámicas y metálicas.

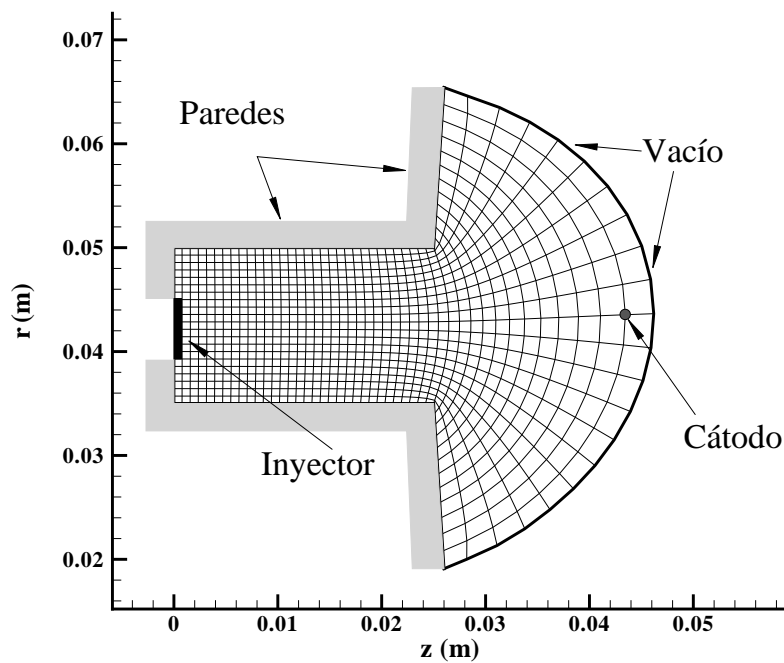


Figura 4.7: Distintos tipos de contorno posibles desde el punto de vista de las partículas.

### 4.7.2. Inyector.

Como ya se ha señalado antes, el inyector supone una entrada de macro-neutros al dominio computacional y todas aquellas macropartículas que salgan del dominio a través de la superficie del inyector son reinyectadas como macro-neutros.

### 4.7.3. Eje de simetría.

En caso de que alguna macropartícula alcanzase el eje de simetría ( $r = 0$ ), la condición a imponer es de reflexión especular debido a la simetría cilíndrica del problema.

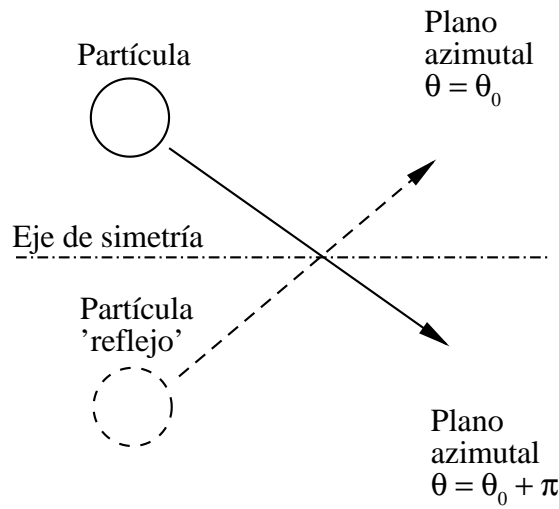


Figura 4.8: Partícula cruzando el eje de simetría ( $r = 0$ ) y su partícula 'reflejo'.

### 4.7.4. Vacío.

En este caso, toda partícula que sale por este tipo de contorno se pierde, tanto si es ion como si es neutro.

Por otro lado, existe la posibilidad de modelizar un vacío no perfecto para simular las condiciones en un banco de ensayos. En ese caso, basta con calcular adecuadamente el flujo de neutros que entran por este contorno al dominio computacional procedentes de la cámara de vacío usada para el experimento. Sin embargo, en este proyecto no se ha hecho uso de dicha opción.

#### 4.7.5. Paredes cerámicas y metálicas.

Con esta condición de contorno se pretende modelar la recombinación de iones en las paredes y la reflexión de los neutros que impactan en la pared.

Como ya se ha dicho, el dominio computacional sólo comprende la zona del canal donde hay cuasineutralidad. Esto excluye las vainas existentes junto a las paredes. El análisis de las vainas se deja para el capítulo (6) aunque se puede adelantar que en ellas se produce normalmente una caída de potencial de forma que cualquier ión que llegue al límite computacional (transición a vaina) que represente una pared cerámica o metálica es acelerado hacia la pared. Al impactar con la pared, el ión se convierte en un neutro que sale de la vaina y entra de nuevo en el dominio computacional. Adicionalmente, puede haber emisión secundaria de electrones (SEE), que será analizada en el capítulo sobre interacción con la pared.

En cuanto a los neutros que llegan al límite computacional, no se ven afectados por la vaina y simplemente sufren un choque con la pared. Sin embargo, el neutro no sufre una reflexión especular como ocurría en el eje de simetría sino que su nueva velocidad es aleatoria.

Por tanto, ambos procesos pueden ser considerados como inyección de flujo de neutros al dominio computacional, esto es, introducción de macro-neutros en el canal con una velocidad que se escoge aleatoriamente de una distribución semimaxwelliana en la dirección normal a la pared y maxwelliana según el plano paralelo a la misma.

$$f_{sm}(v_n, \vec{v}_t) = \frac{m_i v_n}{k T_{emi}} \exp\left(-\frac{m_i v_n^2}{2k T_{emi}}\right) \frac{m_i}{2\pi k T_{emi}} \exp\left(-\frac{m_i \|\vec{v}_t\|^2}{2k T_{emi}}\right) \quad (4.46)$$

donde  $v_n \in [0, \infty[$  y  $\vec{v}_t \in \mathbb{R}^2$  representan la velocidad normal y tangencial a la pared respectivamente y  $T_{emi}$  es una temperatura que caracteriza la función de distribución y que depende de la energía de las partículas en el impacto y de la temperatura de la pared.

Un modelo simplificado para la temperatura de emisión es:

$$T_{emi} = a_w T_{wall} + (1 - a_w) T_{imp} \quad (4.47)$$

donde  $a_w$  es el factor de acomodación medido experimentalmente y  $T_{imp}$  es una temperatura que representa la energía de impacto de las partículas.

Suponiendo una distribución semimaxwelliana la temperatura  $T_{imp,\alpha}$  puede calcularse como:

$$T_{imp,\alpha} = \frac{q_{w,\alpha}}{g_{w,\alpha} 2k} \quad (4.48)$$

donde  $g_{w,\alpha}$  es el flujo de partículas local hacia la pared y  $q_{w,\alpha}$  es el flujo energético hacia la pared de la especie considerada, neutros o iones.

En la anterior ecuación las variables  $g_{w,\alpha}$  y  $q_{w,\alpha}$  representan flujos hacia la pared, y por tanto no pueden calcularse por el procedimiento de pesado bidimensional cilíndrico para la celda, pues éste tiene en cuenta tanto las macropartículas que se alejan de la pared como las se dirigen a ella. Para salvar este problema en [27] se usa un método de pesado de los flujos hacia las paredes a partir de las partículas que salen del dominio computacional. La base del método es análoga al pesado convencional salvo que el sumatorio se extiende sólo a aquellas partículas que salgan del dominio computacional. De esta forma el flujo de partículas hacia la pared queda de la forma:

$$g_{w,\alpha_j} = \frac{1}{\Delta S_j \Delta t} \sum_p \frac{m_p}{m_\alpha} S_j(s) \quad (4.49)$$

donde  $\Delta S_j$  es el área de pesado asociado al nodo  $j$  (sobre la pared) y  $S_j(s)$  la función de pesado asociada dicho nodo  $j$  con  $s$  un parámetro longitud de arco para la pared. Estas funciones de pesado deberían tomarse de primer orden para ser consistentes.

Es posible calcular el flujo de energía total de las partículas de forma análoga y a partir de dichas variables calcular las temperaturas de emisión correspondientes.

Una vez caracterizada por completo la función de distribución de la cual tomar la velocidad del nuevo macro-neutro, es posible realizar el proceso de introducción del mismo. La posición se calcula de forma aleatoria sobre la pared en la que impactó.

Ahora bien, el proceso en el caso de recombinación de iones es más complejo pues la masa de los macro-iones es bastante inferior a la de los macro-neutros. Por ello conocida, la masa a recombinar es posible establecer un procedimiento probabilístico como se propone en [27] para determinar si se crea o no un macro-neutro pero de una masa semejante al resto de macro-neutros.

#### 4.8. Corrección del pesado en los límites de la malla.

Uno de los principales avances de [9] es la demostración de que el pesado PIC-convencional da un error de  $O(\Delta x)$  en los bordes de la malla. Este error es de especial importancia pues las variables como la densidad del plasma o el potencial tienden a variar bastante cerca de las paredes. Como consecuencia de ello, las densidad de plasma y los flujos de partículas especialmente de iones se calculaban erróneamente.

La solución propuesta en [9] consiste en corregir las variables pesadas en las paredes aplicando un simple desarrollo en serie de Taylor que para el caso de la densidad es:

$$(n_{e,jk_s})_{corr} = \frac{3}{2}(n_{e,jk_s})_p - \left(\frac{1}{2}n_{e,jk_s-1}\right)_p \quad (4.50)$$

donde  $(n_{e,jk_s})_{corr}$  es el valor de la densidad de plasma en el nodo de la pared  $j, k_s$  y  $(n_{e,jk_s})_p$  y  $n_{e,jk_s-1})_p$  son los valores obtenidos con el pesado convencional en los nodos  $j, k_s$  y  $j, k_s - 1$ .

Las mejoras mediante la utilización de esta corrección son aún más interesantes cuando se utilizan mallas finas cerca de las paredes. De hecho, combinando la corrección del pesado y una malla adaptativa se consigue verificar la condición de Bohm. Dicha condición exige que en la transición a la vaina no cuasineutra, es decir, en los bordes de la malla, el flujo de iones sea sónico o supersónico. En realidad para un caso estacionario el flujo debe ser sónico aunque efectos no estacionarios pueden provocar que sea supersónico pero nunca subsónico. La expresión matemática en forma macroscópica y despreciando la temperatura de iones y el efecto de iones dobles es:

$$g_{si+,jk_w} \geq n_{e,jk_s} \sqrt{\frac{kT_{e,jk_s}}{m_{i+}}} \quad (4.51)$$

donde  $g_{si+}$  es el flujo de iones simples en la transición a la vaina y dirigido a la pared y  $n_{e,jk_s}$  y  $T_{e,jk_s}$  son la densidad del plasma y la temperatura de electrones en dicha transición a vaina, es decir, en el límite computacional que se calcula con la expresión (4.50). En el código original este procedimiento únicamente se empleaba para la densidad de plasma y el flujo de iones que son las dos variables que mayor variación presentan cerca de las paredes, pero convendría extenderlo al resto de variables pesadas en las paredes.



## 4.9. Forzado de la condición de Bohm.

El procedimiento descrito en el apartado anterior tiene el inconveniente de que para conseguir resultados aceptables requiere utilizar una malla muy fina en las paredes. Esto provoca que el tiempo de ejecución típico se incremente enormemente pasando de 40 minutos de una malla normal a más de 10 horas para una malla refinada en las paredes.

Otro método que permite obtener unos resultados aceptables en un tiempo razonable a costa de introducir fuertes oscilaciones y pérdida de precisión en los resultados es el conocido como forzado de la condición de Bohm.

Este método consiste en corregir la densidad a través de la condición de Bohm, esto es, el valor de la densidad en la pared es el siguiente:

$$\begin{aligned}
 (n_{i+,jk_s})_{BF} &= \min \left( (n_{i+,jk_s})_{corr}, \frac{(g_{si+,jk_s})_{corr}}{\sqrt{kT_{e,jk_s}/m_{i+}}} \right) \\
 (n_{i++,jk_s})_{BF} &= \min \left( (n_{i++,jk_s})_{corr}, \frac{(g_{si++,jk_s})_{corr}}{\sqrt{2kT_{e,jk_s}/m_{i++}}} \right) \\
 (n_{e,jk_s})_{BF} &= (n_{i+,jk_s})_{BF} + 2(n_{i++,jk_s})_{BF}
 \end{aligned} \tag{4.52}$$

Obsérvese que en lo que se refiere a la influencia de los iones dobles en este procedimiento se adopta una solución muy sencilla pero adecuada. Como se verá en el capítulo de interacción con la pared se asume que la velocidad de Bohm efectiva para iones dobles se ve afectada por un factor  $\sqrt{2}$  pues en caso de que solo hubiese iones dobles, ese mismo factor aparecería afectando a la velocidad de Bohm.

En realidad esto no es más que una aproximación pues debería imponerse una condición de Bohm basada en un tratamiento cinético de iones simples y dobles. Sin embargo, se cree que esta es una primera buena solución al problema.

En cualquier caso resulta ser un método bastante intrusivo y en cierta forma inconsistente pues no tiene en cuenta la información de las macropartículas para el cálculo de la densidad.

A pesar de ello los resultados son semejantes a los obtenidos con la técnica del apartado anterior como se muestra en [9]. Por ello durante este proyecto se hará uso de dicho método salvo que se indique lo contrario.



## Capítulo 5

# Modelo fluido de electrones

### 5.1. Introducción

A la hora de modelar los electrones se pueden utilizar dos técnicas muy diferentes, bien considerarlos como un fluido con sus correspondientes ecuaciones macroscópicas de conservación de masa, cantidad de movimiento y energía, o bien modelarlos como partículas en cuyo caso un método PIC como el expuesto para iones y neutros es una opción adecuada. Ambos métodos presentan distintas ventajas e inconvenientes:

- modelo de partículas: el principal problema de esta técnica aplicada a los electrones es que la escala de tiempos asociada a éstos es mucho menor que la de iones y neutros. Como consecuencia de ello el coste computacional asociado es enorme y para poder obtener resultados en tiempos razonables es necesario modificar ciertos parámetros característicos de las partículas electrónicas y acudir a códigos de computación en paralelo que permiten trabajar con grupos de ordenadores simultáneamente. Su principal ventaja es que no realizan ninguna hipótesis simplificativa en cuanto a la función de distribución de velocidades de los electrones, lo cual es muy adecuado cuando se trabajan con plasmas de muy baja densidad.
- modelo fluido: parte de la hipótesis de una distribución maxwelliana de velocidades para los electrones. Esto solamente es estrictamente válido en caso de trabajar con densidades

de partículas elevadas en cuyo caso el nivel de colisiones es lo suficientemente alto para que los electrones sigan dicha distribución. Así por ejemplo para gases como el aire que respiramos resulta ser una descripción adecuada. Por contra, uno de sus principales inconvenientes es que no permite conocer la distribución de velocidades exacta.

En el caso de motores de efecto Hall se tienen densidades de plasma de  $\sim 10^{17} \text{partículas}/\text{m}^3$ , un valor pequeño frente al del aire ( $\sim 10^{25} \text{partículas}/\text{m}^3$ ), pero muy superior al valor de plasmas de muy baja densidad ( $\sim 10^8 \text{partículas}/\text{m}^3$ ). Por tanto nos encontramos en un punto intermedio en el cual cualquiera de las dos opciones puede ser aplicada no sin ciertos problemas.

En este proyecto se ha optado por una descripción fluida de los electrones por dos razones fundamentalmente:

- el coste computacional asociado es bastante menor y permite obtener resultados en tiempos adecuados para una etapa de prediseño.
- el grado de avance en los métodos de resolución de ecuaciones fluidas es mayor que en el caso de métodos de partículas donde todavía existen algunos problemas básicos sin una solución totalmente satisfactoria (por ejemplo, la interacción con la pared)

Con todo, nos encontramos con un método híbrido PIC-fluido que parece ser el mejor compromiso posible entre coste computacional y la precisión de los resultados pues trata a los iones y neutros como partículas y a los electrones como fluido. Tal es así que códigos híbridos han sido desarrollados para la modelización del chorro de motores iónicos y de efecto Hall (véase por ejemplo [13]).

Uno de las principales objetivos del presente proyecto es desarrollar e implementar un modelo de electrones capaz de sacar provecho de toda la potencia de la interacción con el método de partículas y que además permita modelar no solo motores Hall convencionales sino también otros tipos como puedan ser los de alto impulso específico. Aparte, se pretende mejorar los modelos de interacción entre plasma pues los modelos actuales padecen de excesiva simplicidad. Con todo ello se obtendrán resultados para motores y parámetros de funcionamiento y se compararán con diversos resultados experimentales.

## 5.2. Sistemas de referencia

Antes de empezar a describir el modelo fluido conviene tener en cuenta que en los motores de efecto Hall los electrones se ven fuertemente influenciados por el campo magnético. En efecto, la movilidad según la dirección paralela al campo magnético es mucho mayor que según direcciones perpendiculares. Es por ello que en estos motores, con un campo magnético radial dominante, los electrones describen trayectorias helicoidales de paso muy pequeño. Esta fuerte anisotropía puede ser aprovechada a la hora de resolver el campo fluido de los electrones con objeto de simplificar la formulación y métodos a usar. Por ello conviene definir diversos sistemas de referencia que permitan sacar partido de dicha anisotropía de una manera rigurosa matemáticamente.

En esta sección se describen los distintos sistemas de referencia a utilizar en el desarrollo del modelo fluido de electrones. Debido a la geometría anular del motor es posible hacer la hipótesis de simetría cilíndrica. Dicha simetría no se verifica estrictamente debido a la existencia de un cátodo a la salida del canal. Sin embargo, este hecho se puede despreciar si tenemos en cuenta el movimiento fuertemente helicoidal que el campo magnético induce sobre los electrones.

Es posible definir diversos sistemas coordenados que pueden ser de utilidad en lo sucesivo. Aparte del sistema cilíndrico se consideran otros sistemas coordenados en base al campo magnético. Uno de ellos considera a la función de corriente magnética  $\lambda$  y a la función de potencial magnético  $\sigma$  como coordenadas. Esto es posible gracias a que el campo magnético es estacionario como ya se señaló anteriormente. A continuación se resumen dichos sistemas de coordenadas junto con los versores correspondientes:

- coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z) \rightarrow (\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$
- coordenadas magnéticas  $(\sigma, \theta, \lambda) \rightarrow (\vec{u}_\parallel, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\perp)$

donde los versores  $\vec{u}_\parallel$  y  $\vec{u}_\perp$  vienen definidos por:

$$\vec{u}_\parallel = \frac{\vec{B}}{B} \quad \vec{u}_\perp = \vec{u}_\parallel \times \vec{u}_\theta$$

La transformación del sistema de coordenadas cilíndricas al de coordenadas magnéticas viene descrita por las siguientes relaciones:

$$\vec{x}(x(\sigma, \theta, \lambda), y(\sigma, \theta, \lambda), z(\sigma, \theta, \lambda)) \Rightarrow h_\sigma = \frac{1}{B}, \quad h_\theta = r, \quad h_\lambda = \frac{1}{rB}$$

De esta forma el diferencial de volumen  $d\Omega$  y el diferencial de superficie de corriente ( $\lambda=\text{const}$ )  $dS$  se pueden expresar de formas diferentes :

$$d\Omega = dx dy dz = r dr d\theta dz = \frac{1}{B^2} d\sigma d\theta d\lambda = \frac{1}{rB} dS \quad (5.1)$$

$$dS = \frac{r}{B} d\sigma d\theta$$

Además es posible obtener la siguiente relación que será de utilidad más adelante:

$$\left. \frac{ds}{d\lambda} \right|_{r=f(z)} = \frac{1}{\left( \left. \frac{d\lambda}{ds} \right|_{r=f(z)} \right)} = \frac{1}{(\nabla \lambda \cdot \vec{t})} = \frac{1}{r(\nabla \sigma \cdot \vec{N})} = \frac{1}{rB \cos \alpha} \quad (5.2)$$

donde  $s$  es un parámetro longitud de arco a lo largo de meridianos de las paredes del canal,  $f(z)$  representa genéricamente dichos meridianos,  $\vec{t}$  es el vector unitario tangente a los meridianos de las paredes orientado según  $\vec{u}_z$ ,  $\vec{N}$  es la vector unitario normal a las paredes orientado según  $\vec{u}_r$  y  $\alpha$  es el ángulo formado por este último vector y el vector campo magnético local.

Por otro lado, se puede definir un segundo sistema coordenado semejante al anterior pero en forma de coordenadas espaciales, esto es, las coordenadas representan longitudes de arco a lo largo de líneas de corriente y líneas equipotenciales en un plano meridiano. Este sistema viene definido por:

- coordenadas geométricas según dirección de campo magnético  $(\chi, \theta, \zeta) \rightarrow (\vec{u}_\parallel, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\perp)$

En versiones anteriores del modelo ([27], [28]) se utilizaba un sistema coordenado mixto  $(\lambda, \theta, \chi)$ . Sin embargo, este sistema, al igual que el formado por las coordenadas  $(\chi, \theta, \zeta)$ , presenta el problema de que las variables  $\zeta$  y  $\chi$  no verifican la igualdad de las derivadas segundas cruzadas.

Para comprobar este hecho basta con acudir a las ecuaciones que relacionan las coordenadas magnéticas  $(\sigma, \theta, \lambda)$  con las coordenadas  $(\zeta, \theta, \chi)$ :

$$\chi : \quad \frac{\partial \chi}{\partial \sigma} = \frac{1}{B} \quad \zeta : \quad \frac{\partial \zeta}{\partial \lambda} = \frac{1}{rB} \quad (5.3)$$

De ahí se puede obtener, teniendo en cuenta las definiciones de  $\lambda$  y  $\sigma$ , que:

$$\frac{\partial \chi}{\partial z} = \frac{\partial \chi}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial z} = B_z/B \quad \frac{\partial \chi}{\partial r} = \frac{\partial \chi}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial r} = B_r/B$$

A partir de estas relaciones se observa que:

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial z \partial r} = \frac{\partial(B_z/B)}{\partial r} \quad \frac{\partial^2 \chi}{\partial r \partial z} = \frac{\partial(B_r/B)}{\partial z} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \chi}{\partial z \partial r} \neq \frac{\partial^2 \chi}{\partial r \partial z}$$

mientras que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial z \partial r} = \frac{\partial(rB_r)}{\partial r} \quad \frac{\partial^2 \lambda}{\partial r \partial z} = -\frac{\partial(rB_z)}{\partial z} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \lambda}{\partial z \partial r} = \frac{\partial^2 \lambda}{\partial r \partial z} \quad \Longleftrightarrow \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z \partial r} = \frac{\partial B_z}{\partial r} \quad \frac{\partial^2 \sigma}{\partial r \partial z} = \frac{\partial B_r}{\partial z} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z \partial r} = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial r \partial z} \quad \Longleftrightarrow \quad \nabla \times \vec{B} = 0 \end{aligned}$$

Por tanto, las coordenadas espaciales  $\chi$  y  $\zeta$  no verifican la igualdad de derivadas cruzadas por lo que en esta nueva formulación se prefiere utilizar las coordenadas  $(\sigma, \theta, \lambda)$ .

En cualquier caso, sí es posible realizar la transformación  $(\sigma \rightarrow \chi)$  para cada una de las líneas de corriente individualmente. Esto será usado más adelante a la hora de realizar integrales a lo largo de dichas líneas. En particular, el diferencial de superficie de corriente  $dS$  se puede poner como:

$$dS = r d\chi d\theta$$

### 5.3. Ecuaciones macroscópicas de conservación.

En el capítulo 2 se describieron las ecuaciones macroscópicas para un fluido manteniendo en todo momento la hipótesis de anisotropía del tensor presiones. Sin embargo en el caso de los electrones se supondrá que la presión es isótropa quedando las ecuaciones macroscópicas de conservación como:

▪ **Ecuación de continuidad:**

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \vec{u}_e) = \dot{n}_e \quad (5.4)$$

▪ **Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento:**

$$\frac{\partial}{\partial t}(m_e n_e \vec{u}_e) + \nabla \cdot (m_e n_e \vec{u}_e \vec{u}_e) = -\nabla p_e - en_e(\vec{E} + \vec{u}_e \times \vec{B}) + \vec{M} \quad (5.5)$$

▪ **Ecuación de conservación de la energía total:**

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{3}{2} n_e k T_e + \frac{1}{2} m_e n_e u_e^2 \right) + \nabla \cdot \left( \frac{3}{2} n_e k T_e \vec{u}_e + \frac{1}{2} m_e n_e u_e^2 \vec{u}_e \right) = \\ = -\nabla \cdot (p_e \vec{u}_e) - en_e \vec{u}_e \cdot \vec{E} - \nabla \cdot \vec{q}_e + E_e \end{aligned} \quad (5.6)$$

En las ecuaciones anteriores  $\dot{n}_e$ ,  $\vec{M}$  y  $E_e$  representan distintos términos sumidero o fuente de partículas, cantidad de movimiento y energía respectivamente debido a los distintos fenómenos colisionales que los electrones sufren con el resto de especies presentes en el plasma.

En particular,  $\dot{n}_e$  representa la generación de partículas electrónicas por efecto de la ionización. Si se considera la ionización doble se puede poner que:

$$\dot{n}_e = \dot{n}_i^{X_e \rightarrow X_{e+}} + \dot{n}_i^{X_{e+} \rightarrow X_{e++}} + 2\dot{n}_i^{X_e \rightarrow X_{e++}}$$

Por otro lado, en la ecuación de continuidad no se ha incluido el término asociado a la recombinación en el plasma pues ya se ha demostrado mediante distintas estimaciones en el capítulo 4 que dicho término es despreciable frente a la ionización.



## 5.4. Campo eléctrico

Una de las incógnitas fundamentales que se han de calcular en el sub-código de electrones es el campo eléctrico pues es necesario para el movimiento de las partículas. A continuación se muestra cuáles son las hipótesis básicas acerca del mismo.

Como se comentó en el capítulo 3 el campo magnético es constante a lo largo del tiempo y por la hipótesis de cuasineutralidad la densidad de carga neta en cada punto es nula. Por otro lado, las ecuaciones de Maxwell para el potencial eléctrico establecen que:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \nabla \cdot \vec{E} = e(n_i - n_e) \quad (5.7)$$

Combinando todo ello se tiene que:

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad \nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (5.8)$$

Por tanto, el campo eléctrico es irrotacional y admite una función potencial  $\phi$  tal que:

$$\vec{E} = -\nabla \phi \quad (5.9)$$

Con ello, se pasa de tener una incógnita vectorial a tener una incógnita escalar con la simplificación que esto supone.

En base a esto podría parecer que el cálculo del potencial eléctrico puede realizarse a partir de la ecuación de Poisson obtenida a partir de segunda ecuación de (5.8) como:

$$\nabla^2 \phi = 0$$

Sin embargo, tal y como se explica detalladamente en [30] la hipótesis de cuasineutralidad requiere que el potencial eléctrico se calcule a través de las ecuaciones de conservación de los electrones. Así, una manera de comprobar que la hipótesis de cuasineutralidad es correcta es medir como de próximo está el potencial eléctrico a ser una función armónica.

## 5.5. Ecuación de continuidad

Es posible establecer una ecuación de conservación de iones análoga a la de electrones, tanto para iones dobles como iones simples:

$$\frac{\partial n_{i+}}{\partial t} + \nabla \cdot (n_{i+} \vec{u}_{i+}) = \dot{n}_i^{X_e \rightarrow X_{e+}} - \dot{n}_i^{X_{e+} \rightarrow X_{e++}} \quad \frac{\partial n_{i++}}{\partial t} + \nabla \cdot (n_{i++} \vec{u}_{i++}) = \dot{n}_i^{X_e \rightarrow X_{e++}} + \dot{n}_i^{X_{e+} \rightarrow X_{e++}} \quad (5.10)$$

Si se utiliza la hipótesis de cuasineutralidad ( $n_e = n_i^+ + 2n_i^{++}$ ) y se combinan las ecuaciones de conservación para iones y electrones se obtiene la ecuación de conservación de carga:

$$\nabla \cdot \vec{j} = 0 \quad (5.11)$$

Es ésta la forma de la ecuación de continuidad que se usará en el modelo pues es la más simple. Físicamente dicha ecuación muestra que no hay generación ni pérdida de carga eléctrica neta en el interior del plasma.

## 5.6. Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento

La ecuación (5.5) en forma conservativa se puede transformar a su forma no conservativa haciendo uso de la ecuación (5.4):

$$n_e m_e \left( \frac{\partial \vec{u}_e}{\partial t} + \vec{u}_e \cdot \nabla \vec{u}_e \right) = -\nabla p_e - e n_e (\vec{E} + \vec{u}_e \times \vec{B}) + \vec{M} - \dot{n}_e m_e \vec{u}_e \quad (5.12)$$

En dicha ecuación los términos inerciales, tanto convectivos como no estacionarios son despreciables frente al resto debido fundamentalmente a la poca masa de cada partícula electrónica y al fuerte campo magnético presente. Haciendo estimaciones del término convectivo y del término de fuerza magnética para un motor típico se puede demostrar lo anterior:

$$\frac{\|n_e m_e \vec{u}_e \cdot \nabla \vec{u}_e\|}{\|e n_e \vec{u}_e \times \vec{B}\|} \sim \frac{m_e n_e \frac{u_e^2}{L}}{e n_e u_e B} \sim \frac{r_L}{L} \frac{u_e}{v_{te}}$$

En la comparación anterior  $r_L = m_e v_{te} / (eB)$  es el radio de Larmor de los electrones siendo  $v_{te}$  una media del módulo de la velocidad de las electrones llamada normalmente velocidad térmica. Este radio de Larmor representa el radio de la trayectoria en espiral que describen los electrones a lo largo de las líneas de campo magnético en su movimiento y que en un motor Hall típico es del orden del milímetro. Teniendo en cuenta que la longitud típica de uno de estos motores puede oscilar entre 20 o 30 mm se puede entender que  $r_L/L \ll 1$ .

Además, la velocidad térmica de los electrones es mucho mayor que el módulo de la velocidad media  $u_e$ . Esto es debido a que por su definición  $\vec{u}_e$  es la media vectorial de las velocidades de las partículas electrónicas cuyo módulo es muy elevado debido a la baja masa del electrón pero cuya dirección se distribuye uniformemente por todo el espacio. Es por ello que la media de los módulos resulta ser mucho mayor que el módulo de la media. Por tanto se concluye que  $u_e/v_{te} \ll 1$ .

Con los dos últimos análisis se ha mostrado que el tanto término convectivo como el no estacionario (ambos son del mismo orden) son despreciables en la ecuación de cantidad de movimiento frente al término magnético. Por esta razón en muchas ocasiones en la literatura sobre motores de efecto Hall se dice que los electrones no tienen masa y están fuertemente magnetizados.

La ecuación de cantidad de movimiento se convierte entonces en:

$$\vec{0} = -\nabla p_e - en_e(\vec{E} + \vec{u}_e \times \vec{B}) + \vec{M}' \quad (5.13)$$

donde  $\vec{M}' = \vec{M} - \dot{n}_e m_e \vec{u}_e$  incluye el término asociado a  $\dot{n}_e$  que representa la cantidad de movimiento perdida como consecuencia de hacer que los nuevos electrones adquieran la velocidad media del fluido electrónico.

Los modelos usuales para los distintos fenómenos colisionales entre electrones y otras especies se basan en la utilización de una frecuencia efectiva de colisión  $\nu_{e\alpha}$  (véase [32]). Según dicho modelo y asumiendo una frecuencia de ionización efectiva  $\nu_i$  se tendría que:

$$\vec{M}' = \vec{M} - \dot{n}_e m_e \vec{u}_e = \sum_{\alpha} m_e n_e \nu_{e\alpha} (\vec{u}_{\alpha} - \vec{u}_e) - m_e n_e \nu_i \vec{u}_e \quad (5.14)$$

Ahora bien, el término colisional dominante es el debido al de las colisiones elásticas electrón-neutro. Este hecho puede justificarse a través de los resultados obtenidos en [3, 5] por Ahedo *et al.* con un modelo unidimensional estacionario. Así, a efectos de los electrones el resto de colisiones (colisiones de Coulomb electrón-ion, colisiones inelásticas electrón-neutro...) pueden ser despreciadas.

Por otro la velocidad media de los electrones es muy superior a la de los neutros debido a su menor masa quedando pues que:

$$\vec{M}' = -n_e m_e \nu_{en} \vec{u}_e$$

Sin embargo, si bien es cierto que de entre los términos colisionales reales el dominante es el asociado a las colisiones electrón-neutro, existen dos fenómenos adicionales independientes, la difusión anómala y la conductividad cercana a la pared, que serán analizados más adelante pero que se pueden modelar como términos colisionales adicionales ficticios. Por ello se define una frecuencia efectiva  $\nu_e$  que engloba a estos tres fenómenos:

$$\nu_e = \nu_{en} + \nu_{wm} + \nu_{ano} \quad (5.15)$$

donde  $\nu_{ano}$  es la frecuencia colisional asociada a la difusión anómala y  $\nu_{wm}$  es la llamada colisionalidad de pared que pretende representar la conductividad cercana a la pared.

Con todo se tiene que el término colisional adquiere la forma de:

$$\vec{M}' = -n_e m_e \nu_e \vec{u}_e, \quad (5.16)$$

y que la ecuación de cantidad de movimiento queda como:

$$\vec{0} = -\nabla p_e - en_e(\vec{E} + \vec{u}_e \times \vec{B}) - n_e m_e \nu_e \vec{u}_e \quad (5.17)$$

### 5.6.1. Colisiones elásticas electrón-neutro

Para las colisiones elásticas electrón neutro se utilizará el modelo propuesto por Mitchner y Krueger [37] basado en suponer una sección efectiva de colisión constante que para el xenón toma el valor de  $\sigma_{en} = 3 \cdot 10^{-19} \text{ m}^2$ . Entonces, la frecuencia de colisiones viene dada por:

$$\nu_{en} = n_n \langle \sigma_{en} \|\vec{v}_e - \vec{v}_n\| \rangle, \quad (5.18)$$

Como ya se ha mencionado antes, la velocidad media de electrones es muy superior a la de neutros, más aún si se habla de velocidad de partículas. Por ello  $\vec{v}_n$  puede despreciarse frente a  $\vec{v}_e$  quedando al final:

$$\nu_{en} = n_n \sigma_{en} \sqrt{\frac{8kT_e}{\pi m_e}}, \quad (5.19)$$

pues para una distribución maxwelliana de electrones se verifica que:

$$\langle \|\vec{v}_e\| \rangle = c_e = \sqrt{\frac{8kT_e}{\pi m_e}} \implies v_{te} \sim \sqrt{\frac{kT_e}{m_e}}$$

Es posible realizar una estimación del camino libre medio asociado a este tipo de colisiones. Para ello, se puede tomar como valor típico para los motores Hall que la densidad de neutros es  $10^{19} \text{ m}^{-3}$  quedando que el camino libre medio es  $\lambda_{col} \sim v_{te}/\nu_{en} \sim 1/(n_n \sigma_{en}) \sim 300 \text{ mm}$ .

A pesar de que la longitud típica del motor es  $L \sim 25 \text{ mm}$ , debe tenerse en cuenta que los electrones describen una trayectoria helicoidal de paso muy pequeño en su movimiento hacia el ánodo por lo que en realidad la distancia recorrida entre ánodo y cátodo es mucho mayor que esos 25 mm. Como se verá más adelante es posible estimar dicha longitud como el producto de  $L$  por el llamado parámetro de Hall que en este caso adquiere valores del orden de una centena. Por ello, en realidad la distancia recorrida puede estimarse en 2500 mm, muy superior al camino libre medio antes calculado. Por tanto es necesario considerar dicho fenómeno colisional.

### 5.6.2. Movimiento a lo largo de las líneas de campo magnético: equilibrio de Maxwell-Boltzmann

Si se proyecta la ecuación (5.17) sobre las líneas de campo magnético ( $\vec{u}_{\parallel}$ ) se tiene que:

$$0 = -\frac{\partial p_e}{\partial \sigma} + en_e \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} - n_e m_e \nu_{en} u_{\parallel e} / B, \quad (5.20)$$

donde se hecho uso de la definición de potencial eléctrico  $\vec{E} = -\nabla \phi$

De nuevo es posible comparar el término colisional y el término de presión resultando que:

$$\frac{n_e m_e \nu_{en} u_{\parallel e} / B}{\partial p_e / \partial \sigma} \sim \frac{m_e \nu_{en} u_{\parallel e}}{k T_e / L_{ch}} \sim \frac{u_{\parallel e}}{v_{te}} \frac{L_{ch}}{\lambda_{col}} \ll 1$$

Por tanto el efecto global que tienen las colisiones según las líneas de campo magnético puede ser despreciado frente a los efectos de presión.

Como ya se señaló en el capítulo 2 para una distribución maxwelliana isótropa como la de los electrones es  $p_e = n_e k T_e$  y por tanto:

$$0 = -\frac{\partial}{\partial \sigma} (n_e k T_e) + en_e \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \quad (5.21)$$

Como se mostrará más adelante la temperatura de electrones se puede suponer aproximadamente constante a lo largo de las líneas de campo, es decir, es una función de la coordenada magnética  $\lambda$  y del tiempo exclusivamente. Si se aplica esto a la ecuación anterior es posible obtener una integral primera de la misma en la forma:

$$\phi(\sigma, \lambda, t) - \frac{k T_e(\lambda, t)}{e} \ln(n_e(\sigma, \lambda, t) / n_0) = \phi_0(\lambda, t), \quad (5.22)$$

donde  $\phi_0$  es el llamado potencial termalizado referido a la densidad  $n_0$  que es un valor de referencia para la densidad tomado como  $n_0 = 10^{17} \text{particulas}/m^3$ . Esta expresión es conocida como el equilibrio de Maxwell-Boltzmann. Nótese que el potencial termalizado es constante a lo largo de las líneas de campo magnético, de ahí la importancia de dicha magnitud.

Como comentario acerca de esta ley puede señalarse que en [35] se propone una ley adiabática para la temperatura en función de la densidad del plasma. Esta hipótesis conduce a una ecuación equivalente al equilibrio de Maxwell-Boltzmann. Sin embargo, ese trabajo pretende simular el chorro de motores Hall, donde las diferencias de potencial a lo largo de líneas de campo magnético pueden ser importantes. En nuestro caso se está analizando el flujo del plasma en el interior de la cámara de ionización donde dichas diferencias de potencial no son tan elevadas. Es por ello que el equilibrio Maxwell-Boltzmann es aceptable. A pesar de ello, el método que se expondrá a continuación puede ser aplicado a otros tipos de leyes como ésta.

### 5.6.3. Movimiento perpendicular al campo magnético: ley de Ohm

Si se proyecta la ecuación (5.17) sobre la dirección azimutal ( $\vec{u}_\theta$ ), gracias a la axilsimetría del problema y del potencial eléctrico en particular, se obtiene que:

$$0 = -en_e u_{\perp e} B - n_e m_e \nu_e u_{\theta e} \quad (5.23)$$

Así, si se define el parámetro de Hall como  $\beta_e = \omega_e / \nu_e = (eB) / (m_e \nu_e)$ , se tiene que:

$$u_{\theta e} = -\beta_e u_{\perp e} \quad (5.24)$$

donde  $\omega_e = eB / m_e$  es la girofrecuencia del electrón.

Un valor típico del parámetro Hall es  $\beta_e \sim 100$  con lo que la velocidad electrónica es dos órdenes de magnitud mayor en la dirección azimutal que en la dirección de  $\vec{u}_\perp$ . Esto es la expresión matemática de la trayectoria helicoidal de paso pequeño que describen los electrones en su movimiento de cátodo a ánodo.

A partir de la definición del parámetro de Hall se pueden destacar dos aspectos:

- cuanto mayor es el campo magnético, menor es el paso de la trayectoria helicoidal. De ahí que en ocasiones se diga que el campo magnético tiende a atrapar a los electrones.
- el efecto de las colisiones es a aumentar el paso de las hélices, pues gracias a los procesos colisionales los electrones pueden pasar de unas líneas de campo magnético a otras.

Por otro lado, si se proyecta la ecuación (5.17) sobre las líneas perpendiculares al campo magnético ( $\vec{u}_\perp$ ) se obtiene lo siguiente:

$$0 = -rB \frac{\partial}{\partial \lambda} (n_e k T_e) + en_e r B \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} + en_e u_{\theta e} B - n_e m_e \nu_e u_{\perp e} \quad (5.25)$$

De esta ecuación y usando las definiciones anteriores se puede despejar:

$$u_{\perp e} = \frac{r\beta_e}{1 + \beta_e^2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} - \frac{1}{en_e} \frac{\partial}{\partial \lambda} (n_e k T_e) \right) \quad (5.26)$$

Si se utiliza la ley de Maxwell-Boltzmann y el hecho de que el parámetro de Hall verifica que  $\beta_e \gg 1$ , se obtiene la expresión de la ley de Ohm generalizada que se buscaba:

$$u_{\perp e} = \frac{r}{\beta_e} \left( \frac{\partial \phi_0}{\partial \lambda} - (1 - \ln(n_e/n_0)) \frac{\partial (k T_e / e)}{\partial \lambda} \right) \quad (5.27)$$

El significado físico de la anterior expresión es claro. Para un campo magnético creciente hacia la salida del canal, la caída del potencial eléctrico en dicha dirección tiende a hacer la velocidad de los electrones mayor y de signo negativo, es decir, son acelerados hacia el ánodo. El efecto del ascenso de temperatura (o presión) hacia la salida del canal sobre los electrones es análogo.



#### 5.6.4. Conductividad perpendicular al campo magnético: difusión anómala y conductividad cercana a la pared

Los resultados experimentales obtenidos en [38, 39] predicen un valor para el parámetro de Hall inferior a lo que es posible explicar a través de la colisiones electrón-neutro, es decir, el nivel de colisiones teórico no es capaz de explicar la alta conductividad observada en la dirección axial.

Usualmente se argumenta que existen dos fenómenos causantes de dicha elevada conductividad: la difusión anómala y la conductividad cercana a la pared. En la sección (5.6.3) se comentó que en presencia de un campo magnético las colisiones tienden a favorecer la difusión de electrones a lo largo del canal y por ello, los dos fenómenos mencionados anteriormente pueden introducirse en la formulación mediante dos frecuencias colisionales adicionales:

- $\nu_{ano}$ : colisionalidad anómala
- $\nu_{wm}$ : colisionalidad de pared

#### Difusión anómala

Según [28, 38, 39] existen inestabilidades azimutales en la densidad del plasma y en campo eléctrico que de forma separada tienen un valor medio nulo pero que correlacionan temporalmente donde lugar a una fuerza efectiva no nula en la ecuación de cantidad de movimiento que tiende a aumentar el flujo de electrones hacia el ánodo. Esto en cierta forma es similar a lo que ocurre en turbulencia de fluidos convencionales donde aparecen los conocidos esfuerzos de Reynold's debido a la correlación en el tiempo de variaciones de ciertas variables.

Esto conlleva que en aquellas situaciones con un campo magnético fuerte y con densidades relativamente bajas la difusión clásica predicha por la colisiones reales y proporcional a  $1/B^2$  no sea suficiente para justificar los resultados experimentales y por ello se acude a una difusión anómala proporcional a  $1/B$ .

El fenómeno por el cual aparecen estas inestabilidades según [39] parece estar ligado al gradiente de presiones, a anisotropías en la distribución de velocidad de los electrones y a inestabilidades en la interacción con la pared aunque todavía no está claro.

Un análisis estricto del problema queda fuera del alcance del proyecto. En [39] se utiliza el análisis de Fourier para obtener una expresión que permita estimar la difusión anómala. A pesar de ello se ha preferido utilizar un método más sencillo como el propuesto en [27] que permite calcular la colisionalidad anómala. Para ello basta incluir una fuerza adicional en la ecuación (5.23) de la forma  $-e\langle n'_e \vec{E}'_\theta \rangle$  y que representa la correlación de las oscilaciones en densidad y campo eléctrico:

$$0 = -e\langle n'_e \vec{E}'_\theta \rangle - en_e u_{\perp e} B - n_e m_e \nu_{en} u_{\theta e}$$

Combinando esto con la ecuación (5.25) se obtiene que:

$$u_{\perp e} = \frac{r\beta_{en}}{1 + \beta_{en}^2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} - \frac{1}{en_e} \frac{\partial}{\partial \lambda} (n_e k T_e) - \frac{\beta_{en}}{rB} \frac{1}{n_e} \langle n'_e \vec{E}'_\theta \rangle \right)$$

donde  $\beta_{en}$  es el parámetro de Hall basado en las colisiones electrón-neutro.

Si definimos un parámetro  $\alpha_{ano}$  tal que  $\langle n'_e \vec{E}'_\theta \rangle = \alpha_{ano} r B \left( \frac{1}{e} \frac{\partial}{\partial \lambda} (n_e k T_e) - n_e \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} \right)$ , siendo un valor constante para todo el canal, se puede escribir:

$$u_{\perp e} = \frac{r\beta_{en}(1 + \alpha_{ano}\beta_{en})}{1 + \beta_{en}^2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} - \frac{1}{en_e} \frac{\partial}{\partial \lambda} (n_e k T_e) \right)$$

Si se compara esta última expresión con la ecuación (5.26) y se tiene en cuenta que el parámetro de Hall es mucho mayor que la unidad, resulta  $\beta_e(1 + \alpha_{ano}\beta_{en}) = \beta_{en}$

Finalmente por la definición de parámetro de Hall se llega a  $\nu_e = \nu_{en} + \alpha_{ano}\omega_e$  con lo que la manera elegida para modelar la difusión anómala es:

$$\nu_{ano} = \alpha_{ano}\omega_e \tag{5.28}$$

En principio los valores experimentales obtenidos para el parámetro  $\alpha_{ano}$  son diversos, aunque en general un valor clásico obtenido por Bohm es  $\alpha_{ano} \sim 1/16$ . En este proyecto dicho parámetro se considera un grado de libertad con el que ajustar los resultados del código a los experimentales para un caso de referencia. Como dato interesante, en [28] Fife propone un valor  $\alpha_{ano} \sim 1/100$  que coincide con los valores utilizados por Ahedo *et al.* en [6].

**Conductividad cercana a la pared**

La conductividad cercana a la pared es una idea que pretende explicar la movilidad tan alta medida experimentalmente. El efecto neto es aumentar la difusión electrónica y parece que tiene que ver con la interacción plasma-pared. Se argumentan diversas ideas para explicar dicho fenómeno y a continuación se resumen:

- los electrones que proceden de la pared como emisión secundaria tienden a describir un movimiento helicoidal según líneas de campo que provoca un avance medio de la mitad del diámetro de la espiral. Este diámetro puede estimarse en 3mm según [27] frente a los 30mm del canal. Por lo tanto no es un hecho despreciable.
- la existencia de campos magnéticos no perpendiculares a la pared puede provocar que los electrones procedentes de la vaina vean afectados su movimiento de manera que la conductividad aumente.
- la rugosidad de la pared, cuando es del orden de la longitud del Debye, el espesor típico de estas capas no cuasineutras, puede provocar que los electrones que llegan a la vaina y son repelidos por ésta al volver a la región cuasineutra posean una velocidad de dirección determinada por el perfil de rugosidad de la pared. Esto en media puede provocar un aumento de la movilidad de los electrones en la zona cercana a la pared.

En cualquier caso un modelo que permita reproducir dichos fenómenos de forma precisa se sale del alcance del proyecto. El modelo simplificado a utilizar para la colisionalidad de pared y que permite reproducir todos los efectos anteriores de forma sencilla se explica en la sección (5.10).

### 5.7. Ecuación de conservación de la energía total.

Como ya se ha comentado en la sección anterior la velocidad térmica de electrones es mucho mayor que la velocidad media. Para justificar esto podemos acudir a unas sencillas estimaciones.

En primer lugar se ha de tener en cuenta que las componentes radial y axial de la velocidad media de electrones son del mismo orden que la velocidad de iones como muestra la ecuación de conservación de carga. Este hecho se puede observar en [2, 5, 6].

Por otro lado, una estimación de la velocidad axial de los iones se puede realizar basándose en que éstos son acelerados fundamentalmente por el campo eléctrico. Por tanto, se puede poner que:

$$u_{zi} \sim \sqrt{\frac{2eV_d}{m_i}}$$

Para un potencial de descarga típico de 300 V y para un gas como el xenón se tiene que  $u_{zi} \sim 15$  km/s. Sin embargo, esta estimación se basa en el caso más favorable en el que los iones se aceleran con toda la caída de potencial. Puesto que existen otra serie de efectos supongamos que el valor es la mitad del anterior, es decir,  $u_{zi} \sim 7$  km/s. A partir de esto se deduce que la componente más importante de la velocidad media de electrones ( $u_{\theta e}$ ) puede estimarse en  $u_{\theta e} \sim \beta_e u_{ze} \sim \beta_e u_{zi} \sim 700$  km/s

Por otro lado, la velocidad térmica de electrones puede estimarse como  $v_{te} \sim c_e \sim \sqrt{\frac{kT_e}{m_e}}$  con lo que para una temperatura típica de 25 eV se tiene que  $v_{te} \sim 4000$  km/s.

Por tanto, a la vista de las anteriores estimaciones queda mostrado que la velocidad térmica de los electrones es mucho mayor que su velocidad media. Por ello se suele decir que el movimiento de los electrones es difusivo.

Dicha hipótesis se verificará a través de los resultados posteriormente, aunque un chequeo similar ha sido ya realizado por Ahedo *et al.* en [3] con un modelo estacionario unidimensional. La conclusión básica de dicho análisis muestra que la hipótesis de movimiento difusivo es válida para la mayor parte del canal salvo en la zona cercana al ánodo. Se considera que esto tiene poca influencia sobre el flujo global así como sobre las actuaciones. Además, un modelo que incluya términos convectivos en la zona cercana al ánodo complicaría en exceso el análisis.

Una consecuencia directa de la hipótesis de movimiento difusivo es que en la ecuación de la energía, el término cinético de la energía total puede despreciarse frente a la energía interna. Obsérvese que en este caso se está despreciando el cuadrado de la velocidad media frente al cuadrado de la velocidad térmica lo cual está aún más justificado si cabe que en el caso anterior. Así, la ecuación de conservación de la energía puede expresarse como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{3}{2} n_e k T_e \right) + \nabla \cdot \left( \frac{5}{2} n_e k T_e \vec{u}_e + \vec{q}_e \right) = \vec{j}_e \cdot \vec{E} + E_e \quad (5.29)$$

En esta ecuación se observa que las dos únicas fuentes o sumideros de energía para los electrones son el calentamiento Joule, que representa el trabajo realizado por el campo eléctrico en acelerar a los electrones, y los distintos términos colisionales que representan las flujos de energía entre las distintas especies así como posibles pérdidas debidas, por ejemplo, a ionización o radiación.

### 5.7.1. Conducción térmica para los electrones

A diferencia de los fluidos convencionales donde la proporcionalidad del flujo de calor con las variaciones espaciales de temperatura es aceptable (ley de Fourier), cuando se trabaja con plasmas fuertemente magnetizados es necesario tener en cuenta la anisotropía que el campo magnético produce así como el efecto de las colisiones con otras especies. Por ello en [32] se propone la siguiente ley para movimientos difusivos como el considerado aquí:

$$\frac{5}{2} p_e \nabla(kT_e) + e \vec{q}_e \times \vec{B} + m_e \nu_e \vec{q}_e = \vec{0} \quad (5.30)$$

En esta expresión la frecuencia colisional  $\nu_e$  incluye todos los términos señalados en la sección (5.6.1), es decir, colisiones electrón-neutro, conductividad cercana a la pared y difusión anómala. Sin embargo, en esta ocasión no existen razones tan claras como las ya expuestas para la ecuación de cantidad de movimiento para incluir los términos anómalo y de pared en esta ecuación. Este problema se está estudiando y hasta no tener una solución satisfactoria se mantendrá la definición completa de  $\nu_e$ .

La expresión anterior se puede proyectar sobre el sistema de referencia magnético obteniéndose así las distintas componentes del flujo de calor:

$$\begin{aligned}
 q_{\parallel e} &= -\frac{5}{2}en_e \frac{kT_e}{e} \beta_e \frac{\partial(kT_e/e)}{\partial\sigma} \\
 q_{\perp e} &= -\frac{5}{2}en_e r \frac{kT_e}{e} \frac{\beta_e}{1+\beta_e^2} \frac{\partial(kT_e/e)}{\partial\lambda} \\
 q_{\theta e} &= -\frac{5}{2}en_e r \frac{kT_e}{e} \frac{\beta_e^2}{1+\beta_e^2} \frac{\partial(kT_e/e)}{\partial\lambda}
 \end{aligned} \tag{5.31}$$

Es interesante observar como se recupera la proporcionalidad del flujo de calor con la derivada de temperatura, lo cual es característico de la ley de Fourier. Sin embargo, tanto el campo magnético como los fenómenos colisionales tienen su influencia a través del parámetro de Hall. De forma análoga a lo ocurrido con la ecuación de cantidad de movimiento, las colisiones tienden a favorecer la conducción de calor mientras que el campo magnético tiende a disminuirla.

Por otro lado, en [27] se propone que la conducción de calor puede considerarse del mismo orden en todas las direcciones espaciales y por tanto  $q_{\perp e} \sim q_{\parallel e}$ . Atendiendo a las expresiones anteriores se deduce que:

$$\frac{\partial T_e / \partial \sigma}{\partial T_e / \partial \lambda} \sim \frac{1}{1 + \beta_e^2} \ll 1,$$

Así pues las variaciones de temperatura según las líneas de campo son despreciables frente a las variaciones según  $u_{\perp e}$ . Por tanto, puede suponerse en primera aproximación que la temperatura es constante a lo largo de las líneas de corriente, esto es,  $T_e(\lambda, t)$ .

Finalmente, teniendo en cuenta que el parámetro de Hall es mucho mayor que la unidad se puede poner:

$$\begin{aligned}
 q_{\perp e} &= -\frac{5}{2} \frac{r n_e k T_e}{e} \frac{1}{\beta_e} \frac{\partial(kT_e)}{\partial\lambda} \\
 q_{\theta e} &= -\frac{5}{2} \frac{r n_e k T_e}{e} \frac{\partial(kT_e)}{\partial\lambda}
 \end{aligned} \tag{5.32}$$

### 5.7.2. Efecto de las colisiones

Para facilitar el análisis conviene distinguir los dos términos colisionales debido a colisiones elásticas ( $E_{el,e}$ ) e inelásticas ( $E_{in,e}$ ), es decir,  $E_e = E_{el,e} + E_{in,e}$  .

#### Colisiones elásticas

El término asociado a las colisiones elásticas es despreciable frente al calentamiento Joule lo cual se muestra a continuación. La expresión general de dicho término es:

$$E_{el,e} = \sum_{\alpha} m_e \nu_{e\alpha} n_e \left( (\vec{u}_{\alpha} - \vec{u}_e) \cdot \vec{u}_{\alpha} + \frac{2}{m_{\alpha}} \frac{3}{2} k (T_{\alpha} - T_e) \right),$$

Por un lado la temperatura dominante es la de electrones ( $T_{\alpha} \ll T_e$ ) y por otro, la componente de la velocidad de electrones más importante es la componente azimutal verificándose que ( $u_{\alpha} \ll u_{\theta_e}$ ). Así se puede poner que:

$$E_{el,e} = -m_e n_e \nu_e u_{\theta_e}^2 \left( \sum_{\alpha} \left( \frac{\nu_{e\alpha}}{\nu_e} \frac{u_{\theta\alpha}}{u_{\theta_e}} \right) + 3 \frac{k T_e / m_i}{u_{\theta_e}^2} \sum_{\alpha} \left( \frac{\nu_{e\alpha}}{\nu_e} \frac{m_i}{m_{\alpha}} \right) \right),$$

Además, de la ecuación (5.17) multiplicándola escalarmente por  $\vec{u}_e$  se obtiene:

$$\vec{j}_e \cdot \vec{E} = n_e m_e \nu_e \vec{u}_e \cdot \vec{u}_e + \vec{u}_e \cdot \nabla p_e$$

Esta ecuación muestra el equilibrio entre el trabajo realizado por el campo eléctrico y el trabajo realizado por los efectos colisionales y las fuerzas de presión. Por ello, todos los términos deben ser del mismo orden. Haciendo uso de que  $u_{\theta_e}$  domina sobre el resto de componentes se tiene:

$$\vec{j}_e \cdot \vec{E} \sim n_e m_e \nu_e u_{\theta_e}^2$$

A la vista de las dos expresiones anteriores se deduce que el término de colisiones elásticas es despreciable frente al calentamiento Joule pues  $u_{\theta_e}$  es mucho mayor que cualquier otra velocidad media de cualquier especie y que  $\sqrt{k T_e / m_{i+}}$  (velocidad sónica de iones simples).

### Colisiones inelásticas

Las pérdidas de energía debidas a colisiones inelásticas se componen fundamentalmente de la energía empleada en la ionización y de la energía perdida por radiación. Las pérdidas por radiación se deben a que un porcentaje no despreciable de las colisiones electrón-neutro no consiguen la ionización del neutro por no disponer el electrón de suficiente energía. En su lugar, la energía se emplea en colocar a un electrón del neutro en un nivel energético superior e inestable, de forma que poco después vuelve a su nivel original desprendiendo energía en forma de radiación.

La manera de cuantificar estas pérdidas es la siguiente:

$$E_{in,e} = -\dot{n}_i \varphi$$

donde  $\dot{n}_i = \dot{n}_i^{Xe \rightarrow Xe+} + \dot{n}_i^{Xe \rightarrow Xe++} + \dot{n}_i^{Xe+ \rightarrow Xe++}$  representa una frecuencia efectiva de colisiones ionizantes y  $\varphi$  representa la energía perdida para conseguir una colisión ionizante. Obsérvese que se tratan de igual forma todos los procesos de ionización lo cual en principio es incorrecto. Sin embargo, el término de pérdidas inelásticas debido a la ionización doble no es dominante en el física de motores Hall.

En [36] Dugan propone una expresión analítica para  $\varphi$  de la forma:

$$\varphi' = A \exp\left(\frac{B}{\theta}\right) + C \quad \text{donde :} \quad \varphi' = \frac{\varphi}{\epsilon_i} \quad \theta = \frac{kT_e}{\epsilon_i} \quad (5.33)$$

donde  $\epsilon_i$  es la energía de primera ionización del átomo neutro del propulsante.

Las constantes  $A$ ,  $B$  y  $C$  para el argón y el xenón son obtenidas experimentalmente y se muestran en la siguiente tabla:

	$A$	$B$	$C$
Argón	0,188	0,624	1,75
Xenón	0,254	0,677	2,00

Cuadro 5.1: Constantes para ajustar el modelo de Dugan para las pérdidas energéticas de ionización.



La representación gráfica del anterior modelo se muestra en la figura (5.1):

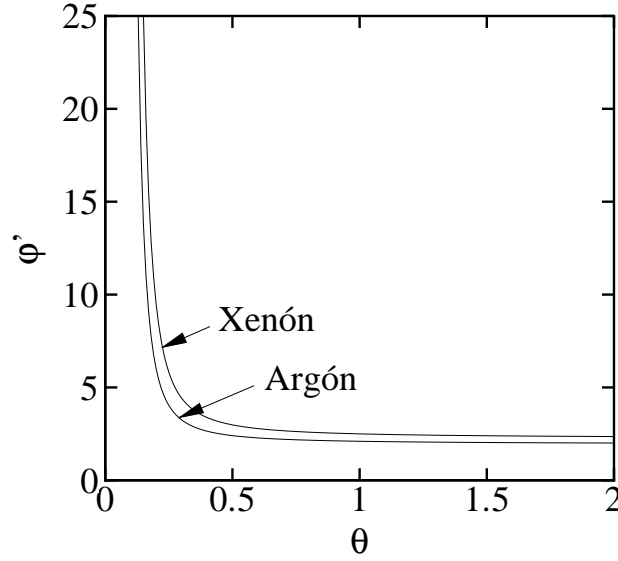


Figura 5.1: Energía adimensionalizada necesaria para la ionización ( $\varphi' = \varphi/\epsilon_i$ ) frente a la temperatura de electrones adimensionalizada ( $\theta = kT_e/\epsilon_i$ ).

Como comentario cabe señalar que cuanto menor es la temperatura mayores son las pérdidas pues el porcentaje de colisiones no ionizantes aumenta, como es lógico según lo explicado anteriormente. Además, para el xenón las pérdidas son ligeramente mayores que para el argón.

Con todo, las pérdidas energéticas por colisiones inelásticas serán:

$$E_{in,e} = -\dot{n}_i \varphi' \epsilon_i$$

### 5.7.3. Ecuación de conservación de la energía total resultante

Tras todo el desarrollo anterior la forma final de la ecuación de conservación de energía total es:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{3}{2} n_e k T_e \right) + \nabla \cdot \left( \frac{5}{2} n_e k T_e \vec{u}_e + \vec{q}_e \right) = \vec{j}_e \cdot \vec{E} - \dot{n}_i \varphi' \epsilon_i \quad (5.34)$$

donde los términos fuente y sumidero de energía son el calentamiento Joule y la energía total perdida en ionización respectivamente.

## 5.8. Ecuaciones del modelo fluido de electrones para HPHall

### 5.8.1. Ecuaciones unidimensionales equivalentes

Como se señaló anteriormente la temperatura de electrones se supone constante a lo largo de líneas de corriente ( $\lambda=\text{const}$ ), lo cual es de suma importancia en la nueva formulación del modelo. Esta hipótesis permite pasar de unas ecuaciones bidimensionales en las variables  $r$  y  $z$  a otras ecuaciones unidimensionales equivalentes en la única variable  $\lambda$ , aparte obviamente del tiempo.

Para obtener dichas ecuaciones se hace uso de una técnica similar a la utilizada en la teoría de mecánica de fluidos sobre flujos en conductos de sección variable. Esta técnica consiste en la integración de las ecuaciones en discos planos de volumen diferencial. En el caso considerado se integran las ecuaciones de continuidad y de energía en discos 'curvos' de volumen diferencial comprendidos entre las superficies de corriente correspondientes a  $\lambda$  y  $\lambda + d\lambda$ .

Con objeto de facilitar el proceso de integración de las ecuaciones resulta interesante analizar una ecuación de conservación genérica en forma diferencial dada por:

$$\nabla \cdot \vec{u} = f$$

donde  $f$  contiene los términos no estacionarios, términos fuente, etc.

Si se integra cada lado de la igualdad por separado se tiene:

$$\iiint_{\partial\Omega} f d\Omega = \int_{\lambda}^{\lambda+d\lambda} \left( \iint_{S(\lambda)} \frac{f}{rB} dS \right) d\lambda = \left( \int_{\Gamma(\lambda)} 2\pi \frac{f}{B} d\chi \right) d\lambda \quad (5.35)$$

$$\begin{aligned} \iiint_{\partial\Omega} (\nabla \cdot \vec{u}) d\Omega &= \left( \int_{S(\lambda+d\lambda)} (\vec{u} \cdot \vec{u}_{\perp}) dS \right) - \left( \iint_{S(\lambda)} (\vec{u} \cdot \vec{u}_{\perp}) dS \right) + 2\pi r(\vec{u} \cdot \vec{n})|_1 ds + 2\pi r(\vec{u} \cdot \vec{n})|_2 ds = \\ &= \left\{ \frac{\partial}{\partial\lambda} \left( \int_{\Gamma(\lambda)} 2\pi r(\vec{u} \cdot \vec{u}_{\perp}) d\chi \right) + \frac{2\pi(\vec{u} \cdot \vec{n})}{(B \cos \alpha)} \Big|_1 + \frac{2\pi(\vec{u} \cdot \vec{n})}{(B \cos \alpha)} \Big|_2 \right\} d\lambda \end{aligned} \quad (5.36)$$

Por tanto, la ecuación equivalente unidimensional es:

$$\left( \int_{\Gamma(\lambda)} 2\pi \frac{f}{B} d\chi \right) = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \int_{\Gamma(\lambda)} 2\pi r (\vec{u} \cdot \vec{u}_\perp) d\chi \right) + \frac{2\pi(\vec{u} \cdot \vec{n})}{(B \cos \alpha)} \Big|_1 + \frac{2\pi(\vec{u} \cdot \vec{n})}{(B \cos \alpha)} \Big|_2 \quad (5.37)$$

En estas expresiones  $f$  es una función escalar cualquiera,  $\vec{u}$  un campo vectorial cualquiera,  $S(\lambda)$  y  $\Gamma(\lambda)$  son la superficie y línea de corriente correspondientes a la coordenada  $\lambda$  respectivamente y  $\vec{n}$  es el vector normal exterior a las paredes laterales. Asimismo, los subíndices 1 y 2 hacen referencia a valores evaluados en las paredes laterales interior ( $r_1$ ) y exterior ( $r_2$ ). Para la obtención de las relaciones anteriores se ha hecho uso del teorema de la divergencia y de las relaciones (5.1) y (5.2).

Antes de integrar conviene definir una serie de variables de interés:

- intensidad de corriente de electrones:

$$I_{de}(\lambda) = \iint_{S(\lambda)} (\vec{j}_e \cdot \vec{u}_\perp) dS = - \int_{\Gamma(\lambda)} 2\pi r n_e (\vec{u}_e \cdot \vec{u}_\perp) d\chi \quad (5.38)$$

- intensidad de corriente iones:

$$I_{di}(\lambda) = \iint_{S(\lambda)} (\vec{j}_i \cdot \vec{u}_\perp) dS = \int_{\Gamma(\lambda)} 2\pi r n_e (\vec{u}_i \cdot \vec{u}_\perp) d\chi \quad (5.39)$$

- intensidad de corriente:

$$I_d(\lambda) = \iint_{S(\lambda)} (\vec{j} \cdot \vec{u}_\perp) dS = \int_{\Gamma(\lambda)} 2\pi r n_e (\vec{u}_i - \vec{u}_e) \cdot \vec{u}_\perp d\chi = I_{di}(\lambda) + I_{de}(\lambda) \quad (5.40)$$

Si se aplica el procedimiento anterior la ecuación de conservación de carga (5.11) queda:

$$\frac{\partial I_d}{\partial \lambda} = - \frac{2\pi j_{s1}}{(B \cos \alpha)|_1} - \frac{2\pi j_{s2}}{(B \cos \alpha)|_2} \quad (5.41)$$

donde  $j_{s1}$  y  $j_{s2}$  son los flujos de carga hacia las paredes que serán modelados posteriormente en el capítulo de interacción plasma-pared.

En segundo lugar, a partir de la definición de intensidad de descarga de electrones y de la expresión (5.27) se puede obtener:

$$\left( \int_{\Gamma(\lambda)} \frac{2\pi e n_e r^2}{\beta_e} d\chi \right) \frac{\partial \phi_0}{\partial \lambda} = \left( \int_{\Gamma(\lambda)} \frac{2\pi e n_e r^2}{\beta_e} (1 - \ln(n_e/n_0)) d\chi \right) \frac{\partial(kT_e/e)}{\partial \lambda} - I_{de} \quad (5.42)$$

Las ecuaciones (5.41) y (5.42) son ecuaciones en las que no aparece explícitamente el tiempo y permiten obtener los perfiles de intensidad de descarga de electrones  $I_{de}(\lambda, t)$  y del potencial termalizado  $\phi_0(\lambda, t)$  para un perfil de temperatura dado  $T_e(\lambda, t)$ .

En tercer lugar a partir de la ecuación de conservación de la energía de los electrones es posible obtener de forma análoga a los casos anteriores:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{3}{2} \left( \int_{\Gamma(\lambda)} \frac{2\pi e n_e}{B} d\chi \right) \frac{kT_e}{e} \right) = \\ & = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{5}{2} \frac{kT_e}{e} I_{de} \right) + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{5}{2} \frac{kT_e}{e} \left( \int_{\Gamma(\lambda)} \frac{2\pi e n_e r^2}{\beta_e} d\chi \right) \frac{\partial(kT_e/e)}{\partial \lambda} \right) + \\ & + \int_{\Gamma(\lambda)} \frac{2\pi(\vec{j}_e \cdot \vec{E})}{B} d\chi - \int_{\Gamma(\lambda)} \frac{2\pi(\dot{n}_i \varphi' \epsilon_i)}{B} d\chi - \frac{2\pi q_{se1}^{tot}}{(B \cos \alpha)|_1} - \frac{2\pi q_{se2}^{tot}}{(B \cos \alpha)|_2} \end{aligned} \quad (5.43)$$

donde  $q_{se1}^{tot}$  y  $q_{se2}^{tot}$  son las pérdidas laterales de energía por unidad de área, esto es:

$$\begin{aligned} q_{se1}^{tot} &= \left( \frac{5}{2} n_e kT_e (\vec{u}_e \cdot \vec{n}) + (\vec{q}_e \cdot \vec{n}) \right) \Big|_1 \\ q_{se2}^{tot} &= \left( \frac{5}{2} n_e kT_e (\vec{u}_e \cdot \vec{n}) + (\vec{q}_e \cdot \vec{n}) \right) \Big|_2 \end{aligned}$$

Esta última ecuación es la versión equivalente unidimensional de la conservación de la energía de electrones y permite calcular la evolución temporal de la temperatura a lo largo de todo el canal.

Obsérvese que en las ecuaciones (5.41), (5.42) y (5.43) aparecen una serie de integrales a lo largo de líneas de campo que dependen de la geometría, del campo magnético, de la densidad del plasma y de la temperatura a través del parámetro de Hall y del término de pérdidas por colisiones inelásticas y por radiación. En las versiones anteriores del modelo estas integrales se suponían constantes en la sub-iteración del modelo de electrones. Esta hipótesis simplificativa no es válida pero se mantuvo para reducir el coste computacional. Sin embargo, el nuevo modelo está optimizado desde ese punto de vista y además la capacidad de cálculo de los ordenadores ha crecido bastante desde entonces. Por ello, esas integrales son evaluadas a cada paso temporal en las ecuaciones de electrones.

En la ecuación (5.43) el término de calentamiento Joule requiere un análisis particular. En el modelo de Fife([28]) este término no se evaluaba de forma completa. Esto era debido a que tras las hipótesis realizadas resultaba imposible calcular la componente paralela a las líneas de campo de la velocidad de electrones ( $u_{e_{b\parallel}}$ ). Por otro lado, en [27] se propone un método mejorado pero que plantea diversos problemas.

En esta nueva formulación se propone un nuevo método que acaba con todos los problemas y deficiencias de versiones anteriores. Este método se basa en obtener el equivalente unidimensional del término de calentamiento Joule. En una versión puramente unidimensional dicho término se reduciría a:

$$-\int_{\Gamma(\lambda)} \frac{2\pi(\vec{j}_e \cdot \nabla\phi)}{B} d\chi \Rightarrow -I_{de} \frac{\partial\phi_0}{\partial\lambda}$$

Sin embargo, en el equivalente unidimensional es esperable que aparezcan una serie de términos adicionales debido a que el problema a resolver es bidimensional.

Para obtener dicho equivalente unidimensional es necesario recordar que ese término procede de una integral sobre un volumen diferencial de la forma:

$$\left( \int_{\Gamma(\lambda)} \frac{2\pi(\vec{j}_e \cdot \vec{E})}{B} d\chi \right) d\lambda = \iiint_{\partial\Omega} (\vec{j}_e \cdot \vec{E}) d\Omega$$

Aplicando la definición del potencial eléctrico e integración por partes se puede poner:

$$\iiint_{\partial\Omega} (\vec{j}_e \cdot \vec{E}) d\Omega = \iiint_{\partial\Omega} \phi (\nabla \cdot \vec{j}_e) d\Omega - \iiint_{\partial\Omega} \nabla \cdot (\phi \vec{j}_e) d\Omega$$

El término asociado a  $\nabla \cdot (\phi \vec{j}_e)$  puede simplificarse haciendo uso del teorema de la divergencia y de la definición del potencial termalizado (5.22):

$$\begin{aligned} \iiint_{\partial\Omega} \nabla \cdot (\phi \vec{j}_e) d\Omega &= \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \phi_0 \left( \iint_{S(\lambda)} (\vec{j}_e \cdot \vec{u}_\perp) dS \right) + \frac{kT_e}{e} \left( \iint_{S(\lambda)} \ln(n_e/n_0) (\vec{j}_e \cdot \vec{u}_\perp) dS \right) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\pi j_{se1}}{(B \cos \alpha)|_1} \left( \phi_0 + \frac{kT_e}{e} \ln(n_e/n_0)|_1 \right) + \frac{2\pi j_{se2}}{(B \cos \alpha)|_2} \left( \phi_0 + \frac{kT_e}{e} \ln(n_e/n_0)|_2 \right) \right\} d\lambda \end{aligned}$$

Por otro lado si se utiliza la expresión (5.27) y la definición de la intensidad de descarga electrónica se obtiene:

$$\begin{aligned} \iiint_{\partial\Omega} \nabla \cdot (\phi \vec{j}_e) d\Omega &= \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \phi_0 I_{de} - \frac{kT_e}{e} \frac{\partial \phi_0}{\partial \lambda} \left( \int_{\Gamma(\lambda)} \frac{2\pi e n_e r^2}{\beta_e} \ln(n_e/n_0) d\chi \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{kT_e}{e} \frac{\partial(kT_e/e)}{\partial \lambda} \left( \int_{\Gamma(\lambda)} \frac{2\pi e n_e r^2}{\beta_e} \ln(n_e/n_0) (1 - \ln(n_e/n_0)) d\chi \right) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\pi j_{se1}}{(B \cos \alpha)|_1} \left( \phi_0 + \frac{kT_e}{e} \ln(n_e/n_0)|_1 \right) + \frac{2\pi j_{se2}}{(B \cos \alpha)|_2} \left( \phi_0 + \frac{kT_e}{e} \ln(n_e/n_0)|_2 \right) \right\} d\lambda \end{aligned}$$

Obsérvese que en esta última expresión aparecen integrales de una forma similar a las que han aparecido anteriormente.

El término asociado a  $\phi (\nabla \cdot \vec{j}_e)$  usando la definición del potencial termalizado, la conservación de electrones (5.4) y el teorema de la divergencia se transforma en:

$$\iiint_{\partial\Omega} \phi (\nabla \cdot \vec{j}_e) d\Omega = \left\{ \phi_0 \left( \frac{\partial I_{de}}{\partial \lambda} + \frac{2\pi j_{se1}}{(B \cos \alpha)|_1} + \frac{2\pi j_{se2}}{(B \cos \alpha)|_2} \right) + \frac{kT_e}{e} \left( \int_{\Gamma(\lambda)} \frac{2\pi e}{B} \left( \frac{\partial n_e}{\partial t} - \dot{n}_e \right) \ln(n_e/n_0) d\chi \right) \right\} d\lambda$$

Combinando ambas expresiones se el término de calentamiento Joule queda de la forma:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma(\lambda)} \frac{2\pi(\vec{j}_e \cdot \vec{E})}{B} d\chi &= -I_{de} \frac{\partial \phi_0}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{kT_e}{e} \frac{\partial \phi_0}{\partial \lambda} \left( \int_{\Gamma(\lambda)} \frac{2\pi e n_e r^2}{\beta_e} \ln(n_e/n_0) d\chi \right) \right) + \\ &- \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{kT_e}{e} \frac{\partial(kT_e/e)}{\partial \lambda} \left( \int_{\Gamma(\lambda)} \frac{2\pi e n_e r^2}{\beta_e} \ln(n_e/n_0)(1 - \ln(n_e/n_0)) d\chi \right) \right) - \frac{2\pi j_{se1}}{(B \cos \alpha)|_1} \frac{kT_e}{e} \ln(n_e/n_0)|_1 + \\ &- \frac{2\pi j_{se2}}{(B \cos \alpha)|_2} \frac{kT_e}{e} \ln(n_e/n_0)|_2 + \frac{kT_e}{e} \left( \int_{\Gamma(\lambda)} \frac{2\pi e}{B} \left( \frac{\partial n_e}{\partial t} - \dot{n}_e \right) \ln(n_e/n_0) d\chi \right) \end{aligned}$$

Como se había señalado inicialmente se ha alcanzado una expresión en donde aparece el término puramente unidimensional junto con una serie de términos adicionales. A pesar de apariencia compleja de la expresión, más adelante se verá que no supone ninguna complicación adicional.

La forma final de la ecuación de conservación de la energía de electrones es como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{3}{2} \left( \int_{\Gamma(\lambda)} \frac{2\pi e n_e}{B} d\chi \right) \frac{kT_e}{e} \right) &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{kT_e}{e} \left( \frac{5}{2} I_{de} + \frac{\partial \phi_0}{\partial \lambda} \left( \int_{\Gamma(\lambda)} \frac{2\pi e n_e r^2}{\beta_e} \ln(n_e/n_0) d\chi \right) \right) \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{kT_e}{e} \frac{\partial(kT_e/e)}{\partial \lambda} \left( \int_{\Gamma(\lambda)} \frac{2\pi e n_e r^2}{\beta_e} \left( \frac{5}{2} - \ln(n_e/n_0)(1 - \ln(n_e/n_0)) \right) d\chi \right) \right) + \\ &- I_{de} \frac{\partial \phi_0}{\partial \lambda} - \int_{\Gamma(\lambda)} \frac{2\pi(\dot{n}_i \varphi' \epsilon_i)}{B} d\chi + \frac{kT_e}{e} \left( \int_{\Gamma(\lambda)} \frac{2\pi e}{B} \left( \frac{\partial n_e}{\partial t} - \dot{n}_e \right) \ln(n_e/n_0) d\chi \right) + \\ &- \frac{2\pi q_{se1}^{tot}}{(B \cos \alpha)|_1} - \frac{2\pi q_{se2}^{tot}}{(B \cos \alpha)|_2} - \frac{2\pi j_{se1}}{(B \cos \alpha)|_1} \frac{kT_e}{e} \ln(n_e/n_0)|_1 - \frac{2\pi j_{se2}}{(B \cos \alpha)|_2} \frac{kT_e}{e} \ln(n_e/n_0)|_2 \end{aligned} \quad (5.44)$$

A la vista de la ecuación se pueden distinguir claramente un término convectivo, otro término difusivo y una serie de términos fuente o sumidero. Es interesante observar como en el término convectivo no solo aparece la intensidad de descarga electrónica, sino que además aparece un sumando adicional debido al calentamiento Joule. De esta forma se puede hablar de una intensidad de descarga de electrones efectiva a efectos de la ecuación de conservación. Algo similar ocurre con el término difusivo y con los términos fuente.

Como conclusión cabe destacar que las ecuaciones (5.41), (5.42) y (5.44) constituyen un sistemas de tres ecuaciones diferenciales, las dos primeras estacionarias y la tercera con la dependencia explícita del tiempo, que permiten calcular la evolución de las variables  $T_e(\lambda, t)$ ,  $\phi_0(\lambda, t)$  y  $I_d(\lambda, t)$ . Conocidas estas tres variables es posible calcular el potencial en todos los puntos del dominio a través de la expresión (5.22). Con ello se conocen las dos variables de salida fundamentales del modelo de electrones, la temperatura y el potencial eléctrico, que son necesarias para el modelo PIC de iones y neutros.

Obviamente estas tres ecuaciones necesitan de una serie de condiciones iniciales y de contorno que se explicarán más adelante.



### 5.8.2. Comparación con ecuaciones unidimensionales

Una vez obtenidas las ecuaciones unidimensionales equivalentes resulta interesante realizar una comparación con un modelo puramente unidimensional. Para ello es necesario reformular el anterior problema utilizando unas nuevas variables que permitan realizar la comparación de una manera más sencilla. La razón de no haber planteado el problema en estas variables desde el principio es que la formulación queda ligeramente más complicada, lo cual supone un coste computacional mayor a la hora de resolver las ecuaciones numéricamente.

En primer lugar definamos una densidad de plasma media a lo largo de las líneas de corriente como:

$$n_e^*(\lambda, t) = \frac{\iint_{S(\lambda)} \frac{n_e}{rB} dS}{\iint_{S(\lambda)} \frac{1}{rB} dS} = \frac{\int_{\Gamma(\lambda)} \frac{2\pi n_e}{B} d\chi}{\int_{\Gamma(\lambda)} \frac{2\pi}{B} d\chi} \quad (5.45)$$

Una propiedad interesante de dicha definición es que en el caso unidimensional con  $B_z = 0$ ,  $B_r = \frac{R}{r} B_0(z)$  la densidad media definida en (5.45) coincide con la densidad media para una sección de  $z = \text{const}$ :

$$\frac{\partial \lambda}{\partial r} = 0 \quad \frac{\partial \lambda}{\partial z} = RB_0(z) \iff (\lambda = \text{const}) \equiv (z = \text{const}), d\chi = dr$$

$$n_e^*(\lambda, t) = \frac{1}{A(z)} \iint_{S(z)} n_e dS$$

donde  $A(z)$  representa el área frontal del canal en la posición axial  $z$ .

En base a (5.45) y de forma similar a (5.22) es posible definir el potencial termalizado medio  $\phi^*(\lambda, t)$  para cada línea de corriente, quedando la relación con el potencial eléctrico como:

$$\phi = \phi^* + \frac{kT_e}{e} \ln(n_e/n_e^*) \quad (5.46)$$

Se puede realizar un desarrollo análogo al realizado en la sección anterior para la ecuación de la energía de electrones utilizando las dos variables anteriores en lugar de  $n_0$  y  $\phi_0$ . Así, la expresión análoga a (5.27) es:

$$u_{\perp e} = \frac{r}{\beta_e} \left( \frac{\partial \phi^*}{\partial \lambda} - (1 - \ln(n_e/n_e^*)) \frac{\partial(kT_e/e)}{\partial \lambda} - \frac{kT_e}{en_e^*} \frac{\partial n_e^*}{\partial \lambda} \right) \quad (5.47)$$

En esta nueva formulación la ecuación de conservación de carga no se ve modificada pero la del potencial termalizado medio queda en la forma:

$$\left( \int_{\Gamma(\lambda)} \frac{2\pi en_e r^2}{\beta_e} d\chi \right) \left( \frac{\partial \phi^*}{\partial \lambda} - \frac{kT_e}{en_e^*} \frac{\partial n_e^*}{\partial \lambda} \right) = \left( \int_{\Gamma(\lambda)} \frac{2\pi en_e r^2}{\beta_e} (1 - \ln(n_e/n_0)) d\chi \right) \frac{\partial(kT_e/e)}{\partial \lambda} - I_{de} \quad (5.48)$$

En este caso la ecuación de la energía se puede obtener como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{3}{2} n_e^* \frac{kT_e}{e} \left( \int_{\Gamma(\lambda)} \frac{2\pi e}{B} d\chi \right) \right) &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{kT_e}{e} \left( \frac{5}{2} I_{de} + \frac{\partial \phi^*}{\partial \lambda} \left( \int_{\Gamma(\lambda)} \frac{2\pi en_e r^2}{\beta_e} \ln(n_e/n_e^*) d\chi \right) \right) \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{kT_e}{e} \frac{\partial(kT_e/e)}{\partial \lambda} \left( \int_{\Gamma(\lambda)} \frac{2\pi en_e r^2}{\beta_e} \left( \frac{5}{2} - \ln(n_e/n_e^*) (1 - \ln(n_e/n_e^*)) \right) d\chi \right) \right) + \\ &- I_{de} \frac{\partial \phi^*}{\partial \lambda} - \int_{\Gamma(\lambda)} \frac{2\pi (\dot{n}_i \varphi' \epsilon_i)}{B} d\chi + \frac{kT_e}{e} \left( \int_{\Gamma(\lambda)} \frac{2\pi e}{B} \left( \frac{\partial n_e}{\partial t} - \dot{n}_e \right) \ln(n_e/n_e^*) d\chi \right) + \\ &- \frac{2\pi q_{se1}^{tot}}{(B \cos \alpha)|_1} - \frac{2\pi q_{se2}^{tot}}{(B \cos \alpha)|_2} - \frac{2\pi j_{se1}}{(B \cos \alpha)|_1} \frac{kT_e}{e} \ln(n_e/n_e^*)|_1 - \frac{2\pi j_{se2}}{(B \cos \alpha)|_2} \frac{kT_e}{e} \ln(n_e/n_e^*)|_2 \\ &- \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \left( \frac{kT_e}{e} \right)^2 \frac{1}{n_e^*} \frac{\partial n_e^*}{\partial \lambda} \left( \int_{\Gamma(\lambda)} \frac{2\pi en_e r^2}{\beta_e} \ln(n_e/n_e^*) d\chi \right) \right) \end{aligned} \quad (5.49)$$

El último término de esta ecuación es la corrección por estar usando las nuevas variables. Como ya se comentó la formulación es más complicada en este caso y se opta por la descrita en el apartado anterior.

Ahora bien, en un análisis puramente unidimensional se tendría un campo magnético radial descrito por:

$$B_z = 0 \quad B_r(z) = \frac{R}{r} B_0(z) \iff (z = \text{const}) \equiv (\lambda = \text{const}), \quad \frac{d\lambda}{dz} = R B_0(z)$$

y se haría la hipótesis de densidad de plasma constante en cada sección ( $z=\text{const}$ ) e igual a su valor medio,  $n_e(r, z) \equiv n_e^*(z)$ . Con ello el potencial eléctrico coincidiría con el potencial termalizado medio en cada sección,  $\phi(r, z) \equiv \phi^*(z)$

En ese caso las ecuaciones (5.41), (5.46), y (5.49) se pueden simplificar quedando en la forma:

$$\frac{\partial I_d}{\partial z} = -2\pi r_1 j_{s1} - 2\pi r_2 j_{s2} \quad (5.50)$$

$$\left( e n_e^* \frac{\partial \phi^*}{\partial z} - \frac{\partial (n_e^* k T_e)}{\partial z} \right) = n_e^* u_{ez} m_e \frac{\omega_e^2}{\nu_e} \quad (5.51)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{3}{2} n_e^* k T_e \right) + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial z} \left( \left( \frac{5}{2} n_e^* k T_e u_{ez} + q_{ez} \right) A \right) = e n_e^* u_{ez} \frac{\partial \phi^*}{\partial z} - \dot{n}_i \varphi' \epsilon_i - \frac{2\pi r_1}{A} q_{se1}^{tot} - \frac{2\pi r_2}{A} q_{se2}^{tot} \quad (5.52)$$

donde  $q_{ez}$  es la conducción de calor unidimensional  $q_{ez} = -\frac{5}{2} n_e^* k T_e \frac{\partial (k T_e)}{\partial z} \frac{1}{m_e} \frac{\nu_e}{\omega_e^2}$  y la frecuencia de colisiones efectiva  $\nu_e$  y el parámetro de Hall  $\beta_e$  deben entenderse como valores promedio a lo largo de las líneas de campo.

Estas tres ecuaciones corresponden a un modelo más sencillo unidimensional no estacionario como se puede encontrar en [52]. Con esto se demuestra que el modelo desarrollado en este proyecto recupera las ecuaciones unidimensionales, lo cual da una cierta validez adicional a la formulación utilizada.

### 5.9. Condiciones de contorno.

Las condiciones de contorno en el modelo fluido de electrones se refieren fundamentalmente al ánodo y al cátodo, o mejor dicho, a las líneas de campo que pasan ellos.

Para modelar el cátodo se acude al concepto de cátodo virtual pues en realidad dicho cátodo no verifica la axilsimetría. El cátodo virtual se sitúa en un punto del chorro y en dicho punto se impone que el potencial eléctrico sea nulo. A partir de esto y de la densidad de plasma en dicho punto procedente del método de partículas es posible estimar el valor del potencial termalizado en dicho punto. Adicionalmente, se supone que en dicho punto la temperatura de electrones tiene un valor de 5 eV que es un valor característico para el flujo de electrones procedente del cátodo. Con ello se tienen los valores de temperatura y de potencial termalizado en la línea de campo que pasa por el cátodo.

En cuanto a la condición de contorno para la temperatura en ánodo existen dos posibilidades:

- imponer conducción de calor nula que es equivalente a exigir que la derivada de la temperatura en el ánodo sea nula.
- imponer una conducción de calor igual equivalente a la que predice el modelo de vaina de ánodo

En el actual proyecto se han desarrollado ambas metodologías y parece que la segunda es la más consistente. Sin embargo, ciertos problemas de convergencia del método shooting que se explicará más adelante nos han obligado a utilizar la primera de las opciones. A pesar de ello, se cree que esto no afecta de manera importante a los resultados. Este problema todavía está en estudio y se espera alcanzar una solución satisfactoria en poco tiempo.

Por otro lado, la diferencia de potencial existente entre cátodo y ánodo debe ser igual al potencial de descarga del motor  $V_d$  incluyendo la caída de potencial ocurrida en la vaina de ánodo. Esto obliga a desarrollar un método de disparos sucesivos en el cual se supone una intensidad de descarga neta en el cátodo que se va modificando hasta que la condición anterior se verifica. La iteración necesaria para dicho método se realiza con un esquema iterativo tipo Newton.

## 5.10. Colisionalidad de pared.

En la sección (5.6.4) se ha descrito el concepto de conductividad cercana a la pared. En este apartado se pretende dar un modelo sencillo para el cálculo de la colisionalidad de pared que representa dicho concepto.

Este modelo está adaptado al modelo de electrones descrito anteriormente y permite calcular la colisionalidad de pared media para una línea de campo haciendo uso de la ecuación de cantidad de movimiento. Dicha ecuación en su componente según  $\vec{u}_\theta$  se puede escribir como:

$$\frac{\partial}{\partial t}(n_e u_{\theta e}) + \nabla \cdot (n_e \vec{u}_e u_{\theta e}) = -n_e(\omega_e u_{\perp e} + \nu_{en} u_{\theta e})$$

En primer lugar señalemos que en dicha ecuación el término dominante es el asociado a  $\omega_e u_{\perp e}$ . Por otro lado, el término no estacionario es despreciable frente al anterior como muestran las siguientes estimaciones:

$$\frac{\partial(n_e u_{\theta e})/\partial t}{n_e \omega_e u_{\perp e}} \sim \frac{u_{\theta e}}{t_{osc} \omega_e u_{\perp e}} \sim \frac{1}{\nu_{en} t_{osc}}$$

donde se usa de la definición del parámetro de Hall basado en las colisiones electrón-neutro.

Un valor típico para la frecuencia de colisiones electrón-neutro se puede obtener a partir del modelo de la sección (5.6.1) siendo el resultado de  $\nu_{en} \sim 10^7 s^{-1}$  mientras que un valor típico de las variaciones temporales es  $t_{osc} \sim 10^{-4}$  pues las oscilaciones típicas en motores Hall son de una frecuencia del orden de kilohercios.

La ecuación resultante de despreciar el término no estacionario se puede integrar entre dos líneas de campo de la forma usual en este proyecto, siendo el resultado:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \int_{\Gamma(\lambda)} 2\pi r n_e u_{\theta e} u_{\perp e} d\chi \right) + \frac{2\pi u_{\theta e} g_{se}}{(B \cos \alpha)} \Big|_1 + \frac{2\pi u_{\theta e} g_{se}}{(B \cos \alpha)} \Big|_2 = - \left( \int_{\Gamma(\lambda)} 2\pi \frac{n_e}{B} (\omega_e u_{\perp e} + \nu_{en} u_{\theta e}) d\chi \right)$$

En la ecuación anterior el término asociado a la derivada espacial se puede despreciar frente al término dominante pues:

$$\frac{\frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \int_{\Gamma(\lambda)} 2\pi r n_e u_{\theta e} u_{\perp e} d\chi \right)}{\left( \int_{\Gamma(\lambda)} 2\pi \frac{n_e}{B} \omega_e u_{\perp e} d\chi \right)} \sim \frac{u_{\theta e}}{L \omega_e}$$

En la sección (5.6.4) se estimó que  $u_{\theta e} \sim 10^6 m/s$  mientras que para un campo magnético  $B \sim 0,025T$  la girofrecuencia del electrón es  $\omega_e \sim 10^9 s^{-1}$ . Además, la longitud típica del canal es  $L \sim 10^{-2}m$ . Por tanto queda justificado despreciar el término asociado a la derivada.

Por contra, el término asociado a los flujos hacia la pared no es despreciable cuando se está próximo a la saturación de carga (este concepto se analizará en el capítulo sobre interacción con pared). Para tener en cuenta dicho término convectivo no considerado hasta ahora es posible definir una frecuencia colisional de la forma:

$$\nu_{wm} = \frac{\frac{2\pi u_{\theta e} g_{se}}{(B \cos \alpha)} \Big|_1 + \frac{2\pi u_{\theta e} g_{se}}{(B \cos \alpha)} \Big|_2}{\left( \int_{\Gamma(\lambda)} 2\pi \frac{n_e}{B} u_{\theta e} d\chi \right)}$$

Teniendo en cuenta la anterior definición se puede escribir:

$$0 = - \left( \int_{\Gamma(\lambda)} 2\pi \frac{n_e}{B} (\omega_e u_{\perp e} + (\nu_{en} + \nu_{wm}) u_{\theta e}) d\chi \right)$$

Gracias a esto ha sido posible definir de un modo sencillo la colisionalidad en la pared. Sin embargo la expresión anterior para  $\nu_{wm}$  es complicada de evaluar. Así, puesto que se trata de un modelo aproximado resulta conveniente simplificarla despreciando la variación de  $u_{\theta e}$  a lo largo de la línea de corriente. Esta hipótesis es aceptable a la vista de la ley de Ohm obtenida en la sección (5.6.3). Por tanto, la definición final de la colisionalidad de pared es:

$$\nu_{wm} = \frac{\sum_{i=1,2} \frac{2\pi g_{se}}{(B \cos \alpha)} \Big|_i}{\left( \int_{\Gamma(\lambda)} 2\pi \frac{n_e}{B} d\chi \right)} \quad (5.53)$$

### 5.11. Métodos de resolución de las ecuaciones de electrones.

En este apartado se pretende describir los métodos usados para la resolución de las ecuaciones de electrones (5.41), (5.42) y (5.44). Estas ecuaciones deben resolverse de forma muy distinta debido a que la ecuación de la energía presenta explícitamente derivadas con respecto al tiempo mientras que las otras dos ecuaciones no.

Por tanto, partiendo de unas condiciones iniciales dadas y de la información aportada por el método de partículas debe resolverse en primer lugar la ecuación de la energía y una vez conocido el perfil de temperatura, se puede abordar el cálculo de los perfiles de potencial eléctrico y de intensidad electrónica asociados.

#### 5.11.1. Malla para resolución de las ecuaciones de electrones.

Para la resolución numérica de las ecuaciones es necesario realizar una discretización tanto espacial como temporal. En el caso de la discretización espacial se acude a utilizar una serie de líneas de campo magnético suficiente para la precisión requerida por el método PIC.

Esta malla magnética se genera en tiempo de preproceso y posee características similares a las de la malla geométrica del método PIC en lo referente a espaciado geométrico, refinamiento cerca de las paredes, etc... . Un ejemplo típico se muestra en la figura (5.2).

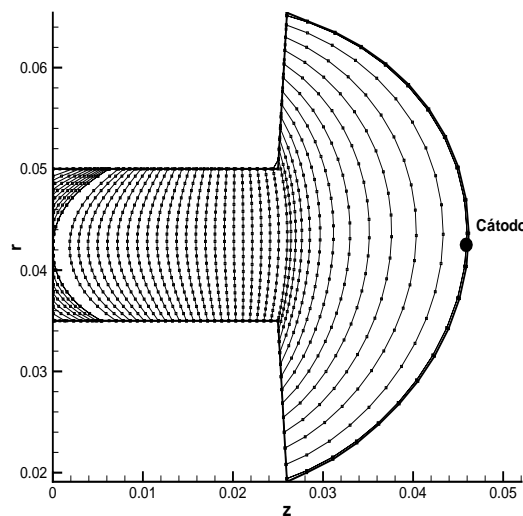


Figura 5.2: Ejemplo de malla magnética

En dicha figura se pueden observar los puntos de cada línea de campo que permiten el cálculo de las integrales necesarias para el campo magnético.

Por otro lado las líneas de campo cortadas por el ánodo son tratadas de forma especial. Debido a que dichas líneas cortan el ánodo su formulación sería demasiado compleja por lo que se ha preferido una formulación más sencilla asumiendo que el ánodo es una línea de campo más a la cual se le asigna un valor de  $\lambda$  medio calculado como el promedio a lo largo de la superficie. Así, a dicha línea virtual de campo magnético en ánodo le corresponde un único valor de temperatura y potencial termalizado. A partir de esos valores es posible calcular los valores correspondientes a las líneas de campo cortadas por el ánodo a través de una sencilla interpolación lineal.

### 5.11.2. Cálculo de la temperatura de electrones.

En primer lugar debe señalarse que la ecuación (5.44) aparece en forma conservativa. Sin embargo, a la hora de resolverla es más útil trabajar con la ecuación en forma no conservativa. Para obtener dicha ecuación basta con hacer uso del equivalente unidimensional de la ecuación de conservación de electrones (5.4). Si se integra en volúmenes diferenciales de la forma explicada anteriormente se obtiene:

$$\frac{\partial I_{de}}{\partial \lambda} = \left( \int_{\Gamma(\lambda)} \frac{2\pi e}{B} \left( \frac{\partial n_e}{\partial t} - \dot{n}_e \right) d\chi \right) - \frac{2\pi j_{se1}}{(B \cos \alpha)|_1} - \frac{2\pi j_{se2}}{(B \cos \alpha)|_2} \quad (5.54)$$

Combinando esto con la ecuación (5.44) se obtiene la ecuación de la energía en forma no conservativa:

$$a \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + b \frac{\partial \epsilon}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( c \epsilon \frac{\partial \epsilon}{\partial \lambda} \right) + q \quad (5.55)$$

donde la variable  $\epsilon$  es la temperatura expresada en electron-voltios ( $\epsilon = kT_e/e$ ) y los coeficientes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $q$  son:

$$a = \frac{3}{2} \left( \int_{\Gamma(\lambda)} \frac{2\pi e n_e}{B} d\chi \right)$$



$$\begin{aligned}
b \equiv b(\epsilon) &= -\frac{5}{2}I_{de} - \frac{\partial\phi_0}{\partial\lambda} \left( \int_{\Gamma(\lambda)} \frac{2\pi en_e r^2}{\beta_e} \ln(n_e/n_0) d\chi \right) \\
c \equiv c(\epsilon) &= \int_{\Gamma(\lambda)} \frac{2\pi en_e r^2}{\beta_e} \left( \frac{5}{2} - \ln(n_e/n_0)(1 - \ln(n_e/n_0)) \right) d\chi \\
q \equiv q(\epsilon) &= -I_{de} \frac{\partial\phi_0}{\partial\lambda} - \int_{\Gamma(\lambda)} \frac{2\pi(\dot{n}_i \varphi' \epsilon_i)}{B} d\chi + \frac{kT_e}{e} \left( \int_{\Gamma(\lambda)} \frac{2\pi e}{B} \left( \frac{\partial n_e}{\partial t} - \dot{n}_e \right) \left( \frac{5}{2} + \ln(n_e/n_0) \right) d\chi \right) + \\
&+ \frac{kT_e}{e} \frac{\partial}{\partial\lambda} \left( \frac{\partial\phi_0}{\partial\lambda} \left( \int_{\Gamma(\lambda)} \frac{2\pi en_e r^2}{\beta_e} \ln(n_e/n_0) d\chi \right) \right) - \frac{2\pi q_{se1}^{tot}}{(B \cos \alpha)|_1} - \frac{2\pi q_{se2}^{tot}}{(B \cos \alpha)|_2} \\
&- \frac{2\pi j_{se1}}{(B \cos \alpha)|_1} \frac{kT_e}{e} \left( \frac{5}{2} + \ln(n_e/n_0)|_1 \right) - \frac{2\pi j_{se2}}{(B \cos \alpha)|_2} \frac{kT_e}{e} \left( \frac{5}{2} + \ln(n_e/n_0)|_2 \right) \\
&- \frac{kT_e}{e} \frac{3}{2} \left( \int_{\Gamma(\lambda)} \frac{2\pi e}{B} \frac{\partial n_e}{\partial t} d\chi \right)
\end{aligned} \tag{5.56}$$

Así pues, se ha alcanzado una ecuación resoluble por métodos numéricos usuales. Sin embargo, obsérvese que tanto el coeficiente del término convectivo ( $b(\epsilon)$ ) como el coeficiente del término difusivo ( $c(\epsilon)$ ) dependen de la temperatura a través del parámetro de Hall lo que da un marcado carácter no lineal a la ecuación.

Esta ecuación puede adimensionalizarse usando unos valores de referencia típicos. Así:

$$\tilde{a} \frac{\partial \tilde{\epsilon}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{b} \frac{\partial \tilde{\epsilon}}{\partial \tilde{\lambda}} = \frac{\partial}{\partial \tilde{\lambda}} \left( \tilde{c} \tilde{\epsilon} \frac{\partial \tilde{\epsilon}}{\partial \tilde{\lambda}} \right) + \tilde{q} \tag{5.57}$$

Los valores usados para adimensionalizar las variables deben ser valores típicos de dichas variables. Así, para la temperatura se puede utilizar la energía necesaria para la ionización que en el caso del Xenón es  $\epsilon_i = 12,1 eV$ . Por otro lado, para el campo magnético se puede utilizar el valor máximo del mismo,  $(B_m)$ ; para la coordenada  $z$ , la longitud del motor,  $L$ ; para la coordenada  $r$ , el radio medio del canal,  $R_m$ ; para la coordenada  $\chi$  la diferencia de radios entre las paredes exterior e interior,  $h$ .

De esta forma es posible adimensionalizar la variables como sigue:

$$\begin{aligned}\tilde{\epsilon} &= \frac{\epsilon}{\epsilon_i} & \tilde{\lambda} &= \lambda \frac{1}{B_m L R_m} & \tilde{t} &= t \frac{v_0}{L} \\ \tilde{a} &= a \frac{B_m}{2\pi e n_0 h} & \tilde{b} &= b \frac{1}{I_{d_0}} \tilde{c} = c \frac{\epsilon_i}{I_{d_0} R_m B_m L} & \tilde{q} &= q \frac{B_m L R_m}{\epsilon_i I_{d_0}}\end{aligned}\quad (5.58)$$

donde  $I_{d_0}$  es una intensidad de descarga de referencia y  $v_0$  es una velocidad de referencia definidos como:

$$I_{d_0} = 2\pi e n_0 v_0 h R_m \quad v_0 = \sqrt{\frac{e\epsilon_i}{m_i}}$$

Para resolver la ecuación adimensional (5.57) se utiliza el método numérico ‘FTCS’ (”forward in time and centered in space”) caracterizado por una discretización espacial centrada del término convectivo y del término difusivo y una discretización del tipo Euler explícita para el término temporal.

Para aplicar correctamente dicho método, a la hora de discretizar las derivadas es necesario tener en cuenta que la malla asociada a la variable magnética  $\lambda$  es no uniforme.

Una discretización correcta en malla no uniforme de las derivadas primera y segunda de una función son de la forma:

$$\left(\frac{\partial \tilde{\epsilon}}{\partial \tilde{\lambda}}\right)_l = \beta_{l+1} \tilde{\epsilon}_{l+1} + \beta_l \tilde{\epsilon}_l + \beta_{l-1} \tilde{\epsilon}_{l-1} \quad \left(\frac{\partial^2 \tilde{\epsilon}}{\partial \tilde{\lambda}^2}\right)_l = \gamma_{l+1} \tilde{\epsilon}_{l+1} + \gamma_l \tilde{\epsilon}_l + \gamma_{l-1} \tilde{\epsilon}_{l-1} \quad (5.59)$$

donde

$$\begin{aligned}\beta_{l+1} &= \frac{\Delta \tilde{\lambda}_{l-1/2}}{\Delta \tilde{\lambda}_{l+1/2} (\Delta \tilde{\lambda}_{l+1/2} + \Delta \tilde{\lambda}_{l-1/2})} & \gamma_{l+1} &= \frac{2}{\Delta \tilde{\lambda}_{l+1/2} (\Delta \tilde{\lambda}_{l+1/2} + \Delta \tilde{\lambda}_{l-1/2})} \\ \beta_l &= \frac{(\Delta \tilde{\lambda}_{l+1/2} - \Delta \tilde{\lambda}_{l-1/2})}{\Delta \tilde{\lambda}_{l+1/2} \Delta \tilde{\lambda}_{l-1/2}} & \gamma_l &= -\frac{2}{\Delta \tilde{\lambda}_{l+1/2} \Delta \tilde{\lambda}_{l-1/2}} \\ \beta_{l-1} &= -\frac{\Delta \tilde{\lambda}_{l+1/2}}{\Delta \tilde{\lambda}_{l-1/2} (\Delta \tilde{\lambda}_{l+1/2} + \Delta \tilde{\lambda}_{l-1/2})} & \gamma_{l-1} &= \frac{2}{\Delta \tilde{\lambda}_{l-1/2} (\Delta \tilde{\lambda}_{l+1/2} + \Delta \tilde{\lambda}_{l-1/2})}\end{aligned}\quad (5.60)$$

En estas expresiones los subíndices  $l + 1$ ,  $l$  y  $l - 1$  hacen referencia genéricamente a tres nodos consecutivos de la malla y  $\Delta\tilde{\lambda}_{l-1/2}$  y  $\Delta\tilde{\lambda}_{l+1/2}$  son la diferencia entre los nodos  $(l, l - 1)$  y  $(l, l + 1)$  en la variable  $\lambda$  respectivamente.

Se comprueba que en el límite de una malla uniforme ( $\Delta\tilde{\lambda}_{l-1/2} = \Delta\tilde{\lambda}_{l+1/2} = \Delta\tilde{\lambda}$ ) se recuperan la expresiones usuales:

$$\left(\frac{\partial\tilde{\epsilon}}{\partial\tilde{\lambda}}\right)_l = \frac{\tilde{\epsilon}_{l+1} - \tilde{\epsilon}_{l-1}}{2\Delta\tilde{\lambda}} \quad \left(\frac{\partial^2\tilde{\epsilon}}{\partial\tilde{\lambda}^2}\right)_l = \frac{\tilde{\epsilon}_{l+1} - 2\tilde{\epsilon}_l + \tilde{\epsilon}_{l-1}}{\Delta\tilde{\lambda}}$$

Aplicando sucesivas veces los algoritmos (5.59) junto con la fórmula de Euler explícita para el término temporal es posible encontrar un algoritmo para el cálculo de la temperatura en cada nodo para el instante temporal  $t + \delta t$  a partir de las variables en  $t$  (representados respectivamente por los superíndices  $n + 1$  y  $n$ ):

$$\tilde{\epsilon}_l^{n+1} = \tilde{\epsilon}_l^n + \delta t \frac{F(\tilde{\epsilon}_{l+1}^n, \tilde{\epsilon}_l^n, \tilde{\epsilon}_{l-1}^n)}{\tilde{a}} \quad (5.61)$$

con

$$\begin{aligned} F(\tilde{\epsilon}_{l+1}^n, \tilde{\epsilon}_l^n, \tilde{\epsilon}_{l-1}^n) = & q_l^n - b_l(\beta_{l+1}^n \tilde{\epsilon}_{l+1}^n + \beta_l \tilde{\epsilon}_l^n + \beta_{l-1} \tilde{\epsilon}_{l-1}^n) + \tilde{\epsilon}_{l+1}^{n^2}(\beta_{l+1}^2 \tilde{\epsilon}_{l+1}^n) + \\ & + \tilde{\epsilon}_l^{n^2}(\beta_l^2 \tilde{\epsilon}_l^n + \gamma_l \tilde{\epsilon}_l^n) + \tilde{\epsilon}_{l-1}^{n^2}(\beta_{l-1}^2 \tilde{\epsilon}_{l-1}^n) + \tilde{\epsilon}_{l+1}^n \tilde{\epsilon}_{l-1}^n \beta_{l+1} \beta_{l-1} (\tilde{\epsilon}_{l+1}^n + \tilde{\epsilon}_{l-1}^n) \\ & + \tilde{\epsilon}_l^n \tilde{\epsilon}_{l-1}^n (\beta_{l+1} \beta_l (\tilde{\epsilon}_{l+1}^n + \tilde{\epsilon}_l^n) + \gamma_{l+1}^n \tilde{\epsilon}_l^n) + \tilde{\epsilon}_l^n \tilde{\epsilon}_{l-1}^n (\beta_l \beta_{l-1} (\tilde{\epsilon}_l^n + \tilde{\epsilon}_{l-1}^n) + \gamma_{l-1}^n \tilde{\epsilon}_l^n) \end{aligned} \quad (5.62)$$

La expresión (5.61) permite calcular la temperatura adimensional en el instante  $t + \delta t$  partiendo del conocimiento de todas las variables en el instante  $t$ . Como veremos más adelante el hecho de que el algoritmo sea explícito en el tiempo obliga a utilizar pasos temporales en el modelo de electrones ( $\delta t$ ) inferiores a los que utiliza el método PIC( $\Delta t$ ). Por ello, el acoplamiento entre ambos métodos requiere ser analizado con precaución.

### 5.11.3. Estabilidad numérica en el cálculo del perfil de temperatura.

Como cualquier método numérico explícito, el método 'FTCS' presenta restricciones en cuanto al paso temporal. Es decir, cuanto más fina sea la malla espacial, más pequeño tiene que ser el paso temporal para evitar inestabilidades numéricas. Teniendo en cuenta que no es deseable incrementar el tiempo de computación en exceso pues el método PIC de por sí ya es lento, y que es deseable una precisión adecuada se debe llegar a un valor de compromiso en cuanto al paso temporal de electrones.

En el presente proyecto se pretende optimizar el coste computacional y por ello es necesario realizar un análisis de estabilidad numérica adecuado para así poder utilizar el valor máximo de  $\delta t$  en todo momento.

Se utilizará el método de Von-Neumann para el cálculo del paso temporal necesario, pues a pesar de las hipótesis simplificadoras que éste requiere, permite obtener una primera estimación bastante buena. Éste método sólo analiza estabilidad lineal por lo que es necesario linealizar la ecuación (5.57). El resultado de dicha linealización es:

$$\frac{\partial \tilde{\epsilon}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{\epsilon}}{\partial \tilde{\lambda}} = \tilde{\mu} \frac{\partial^2 \tilde{\epsilon}}{\partial \tilde{\lambda}^2} + \tilde{f} \tilde{\epsilon} \quad (5.63)$$

donde  $\tilde{\mu} = \tilde{c}\tilde{\epsilon}/\tilde{a}$ ,  $\tilde{u} = \tilde{b}/\tilde{a}$  y  $\tilde{f} = \tilde{q}/\tilde{\epsilon}\tilde{a}$  y cada uno de los coeficientes debe suponerse inicialmente independientes de la posición.

La expresión anterior es similar a la ecuación de Burgers viscosa aunque con un término fuente adicional que cambia ligeramente su carácter aunque el análisis de estabilidad es similar.

Si suponemos que la malla es uniforme, la aplicación del método de Von-Neumann da como límite superior del paso temporal:

$$(\delta t)_{max} = \min\left(\frac{\Delta \tilde{\lambda}}{\tilde{u}}, \frac{2}{(4\tilde{\mu}/\Delta \tilde{\lambda}^2) - \tilde{f}}\right)$$

Debido a la dependencia de los coeficientes con la posición así como a la no linealidad de la ecuación de partida es necesario calcular  $(\delta t)_{max}$  asociado a cada posición y finalmente quedarse con el menor de todos ellos.

A pesar de que los resultados anteriores se basan en la hipótesis de que la malla sea uniforme, como primera aproximación pueden aceptarse.

Sin embargo, el análisis de estabilidad viene influenciado por el hecho de que la malla sea no uniforme. Así, puesto que se pretende optimizar el paso temporal, debe realizarse un análisis más detallado para una malla no uniforme. El resultado, que se puede obtener de forma similar al caso anterior, se muestra a continuación:

$$(\delta t)_{max} = \min\left(\delta t_{max_1}, \delta t_{max_2}\right)$$

$$\delta t_{max_1} \hat{\lambda}_1 = -2$$

$$\delta t_{max_2} \hat{\lambda}_2 = -1$$

Las dos expresiones anteriores resultan de imponer en los dos casos límites que los autovalores numéricos asociados al problema queden dentro de la región de estabilidad absoluta del esquema Euler explícito. Para la ecuación y discretización consideradas los valores de los parámetros  $\hat{\lambda}_1$  y  $\hat{\lambda}_2$  son:

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_1 &= \tilde{f}_l + \frac{\tilde{u}}{(\Delta\tilde{\lambda}_{l+1/2} + \Delta\tilde{\lambda}_{l-1/2})/2} \left( \frac{\Delta\tilde{\lambda}_{l-1/2}}{\Delta\tilde{\lambda}_{l+1/2}} - \frac{\Delta\tilde{\lambda}_{l+1/2}}{\Delta\tilde{\lambda}_{l-1/2}} \right) + \\ &\quad - \frac{2\tilde{\mu}_l}{(\Delta\tilde{\lambda}_{l+1/2} + \Delta\tilde{\lambda}_{l-1/2})/2} \left( \frac{1}{\Delta\tilde{\lambda}_{l+1/2}} + \frac{1}{\Delta\tilde{\lambda}_{l-1/2}} \right) \\ \hat{\lambda}_2 &= \frac{(1/2)\tilde{u}}{(\Delta\tilde{\lambda}_{l+1/2} + \Delta\tilde{\lambda}_{l-1/2})/2} \left( \frac{\Delta\tilde{\lambda}_{l-1/2}}{\Delta\tilde{\lambda}_{l+1/2}} + \frac{\Delta\tilde{\lambda}_{l+1/2}}{\Delta\tilde{\lambda}_{l-1/2}} \right) + \\ &\quad + \frac{\tilde{\mu}_l}{(\Delta\tilde{\lambda}_{l+1/2} + \Delta\tilde{\lambda}_{l-1/2})/2} \left( \frac{1}{\Delta\tilde{\lambda}_{l+1/2}} - \frac{1}{\Delta\tilde{\lambda}_{l-1/2}} \right) \end{aligned}$$

Obsérvese que en el caso de malla uniforme ( $\Delta\tilde{\lambda}_{l-1/2} = \Delta\tilde{\lambda}_{l+1/2} = \Delta\tilde{\lambda}$ ) se recuperan las expresiones anteriores.

De nuevo es necesario evaluar estas cantidades en cada uno de los nodos para finalmente escoger el valor más restrictivo.

Desde un punto de vista práctico, debido a la manera en la que se crea la malla en la variable  $\lambda$ , los mayores problemas de estabilidad aparecen cerca del ánodo y del cátodo. Esto se debe a que en esas zonas las variaciones espaciales de  $\lambda$  son pequeñas pues el campo magnético radial en ellas es relativamente pequeño. Por tanto, es en estas regiones donde cabe esperar las principales inestabilidades numéricas. Para evitarlo, la malla es generada de forma que permita alcanzar un nivel de precisión aceptable.

Tras todo este análisis, cabe destacar que aplicando esta metodología ha sido posible aumentar en diez veces el paso temporal de electrones lo cual supone una reducción del tiempo de computación importante. A pesar, de ello dicho paso temporal sigue siendo bastante inferior al usado por el método PIC lo cual tiene especial importancia en la interacción entre los dos métodos.

Una posible mejora futura podría ser la utilización de un método implícito en el cálculo de la evolución de la temperatura como el propuesto por Hagelaar *et al.* en [16]. La principal ventaja de los métodos implícitos es que no introducen ninguna restricción al paso temporal por cuestiones de estabilidad numérica. Sin embargo su implementación es mucho más compleja, no estando clara la posibilidad de utilizar un método de este tipo con el modelo de electrones propuesto en este proyecto.

**5.11.4. Cálculo del potencial termalizado y de la intensidad electrónica.**

Las ecuaciones para el cálculo de la intensidad de corriente electrónica  $I_{de}(\lambda, t)$  (5.41) y del potencial termalizado  $\phi_0(\lambda, t)$  (5.42) son dos ecuaciones con una única variable independiente explícita ( $\lambda$ ) que constituyen un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO's).

A la hora de resolver dichas ecuaciones debe mantenerse el orden del error espacial del método 'FTCS' usado en la ecuación de la energía. Por ello se acude a un método Adams-Bashforth de orden 2 (AB2) adaptado a mallas no uniformes. Este método tiene la ventaja de ser explícito y de optimizar el coste computacional asociado.

El sistema de ecuaciones formado por (5.41) y (5.42) se puede representar como:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial \lambda} = F(\vec{U}, \lambda) \quad (5.64)$$

donde  $U$  es un vector de componentes  $\phi_0$  y  $I_{de}$  y  $F$  es otro vector que recoge los términos fuente o sumidero de cada una de las variables anteriores.

Obsérvese que la dependencia de  $\vec{F}$  con respecto a las dos incógnitas aparece debido a la presencia de  $I_{de}$  en la ecuación del potencial termalizado y a la dependencia de los flujos de carga hacia las paredes con respecto del potencial local.

Con todo, este método permite integrar el sistema de ecuaciones considerado a partir de unas condiciones iniciales dadas. En este caso se comienza la integración desde el cátodo donde se conoce el potencial termalizado y se supone un cierto valor de intensidad de electrones.

El método AB2 para mallas no uniformes se caracteriza por una discretización de la forma:

$$\begin{aligned} \vec{U}_{l-1} &= \vec{U}_l + \Delta\lambda_{l-1/2} \left( \alpha_l F(\vec{U}_l, \lambda_l) + \alpha_{l+1} F(\vec{U}_{l+1}, \lambda_{l+1}) \right) \\ \alpha_l &= \frac{\Delta\lambda_{l-1/2} + 2\Delta\lambda_{l+1/2}}{2\Delta\lambda_{l+1/2}} \quad \alpha_{l+1} = -\frac{\Delta\lambda_{l-1/2}}{2\Delta\lambda_{l+1/2}} \end{aligned} \quad (5.65)$$

Como se puede observar el método AB2 es bipaso, es decir, requiere la información en dos nodos anteriores. Por ello, para el primer paso de la integración espacial se utiliza una discretización Euler explícita que no afecta para el orden global del error cometido pues sólo se utiliza en el primer nodo.

### 5.12. Acoplamiento métodos PIC/fluido.

Puesto que las metodologías utilizadas para iones y neutros y para electrones son diferentes y el paso temporal de cada método es diferente se debe prestar atención a los flujos de información entre los mismos.

Por un lado, el método PIC necesita del campo eléctrico para mover la partículas y la temperatura para evaluar los procesos colisionales. Por otro, el subcódigo de electrones requiere el valor de la densidad de plasma y de neutros, así como los flujos de partículas y de energía de iones y neutros hacia el exterior de la región cuasineutra. Así pues, ambos submodelos se complementan adecuadamente pues la información necesaria para el PIC es aportada por el método de electrones y viceversa con la salvedad de que el campo eléctrico debe calcularse utilizando diferenciación numérica a partir del potencial eléctrico.

Las mallas utilizadas en cada método son diferentes por lo que es necesario traspasar la información de una a otra y a la inversa. Para ello se utilizan interpolaciones bilineales.

Puesto que el paso temporal de electrones ( $\delta t$ ) es bastante inferior al de iones ( $\Delta t$ ) se debe resolver las ecuaciones de electrones ( $\Delta t/\delta t$ ) veces por cada vez que se resuelve el movimiento de iones y neutros. Como consecuencia de ello se tiene que el tiempo de computación asociado a cada método sea del 50 % del total, a pesar de que el modelo de electrones requiere menos tiempo por iteración.

El esquema de funcionamiento del modelo se muestra en la siguiente página donde puede verse el flujo de información de un método a otro de forma sencilla.



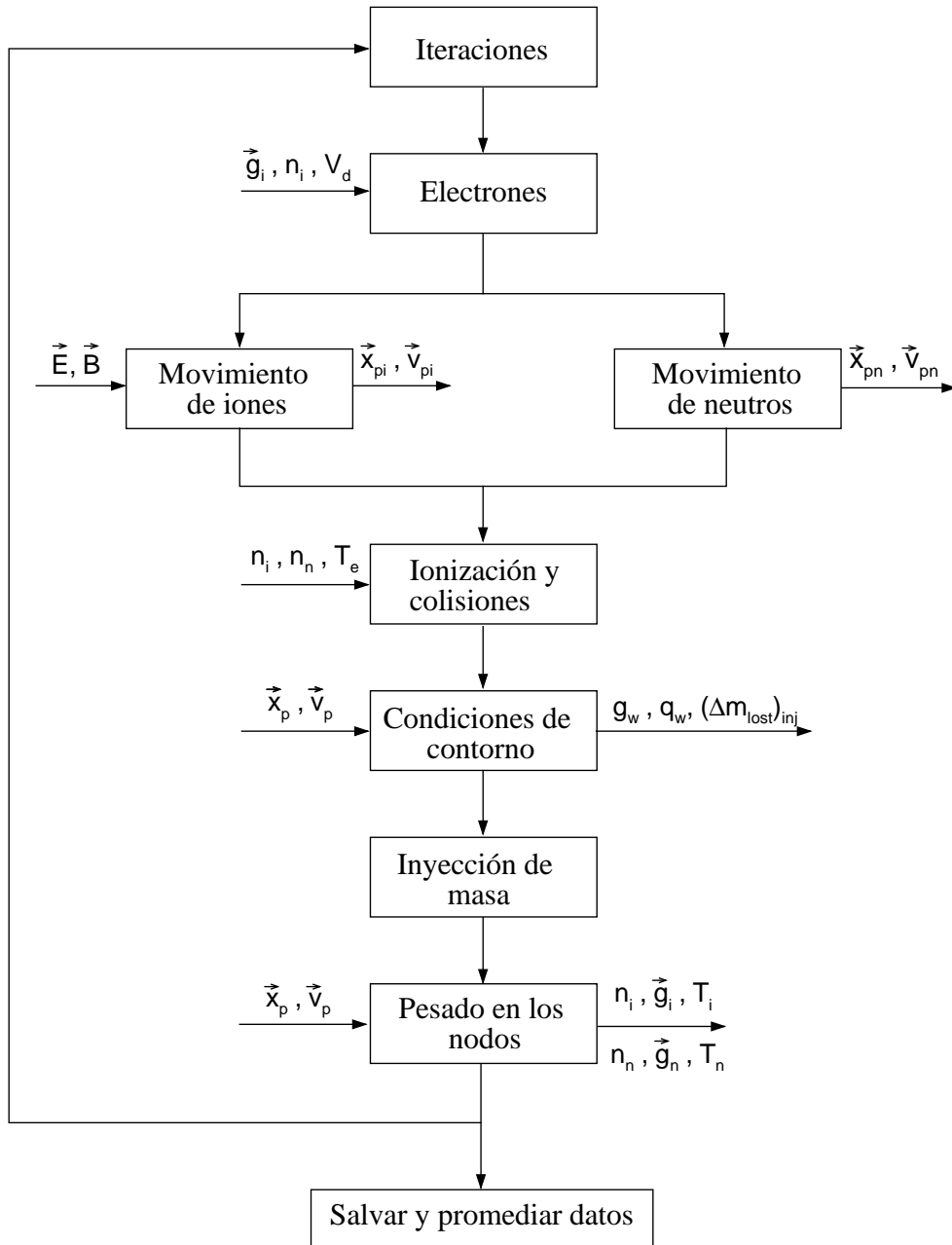


Figura 5.3: Diagrama de flujo del programa.

### 5.13. Ventajas e inconvenientes del nuevo modelo fluido.

En esta sección se pretende justificar el haber implementado un modelo de electrones completamente nuevo cuando HPHall ya tenía uno que a primera vista parecía correcto. Las principales ventajas se resumen a continuación, algunas de las cuales ya han sido mencionadas durante el desarrollo del capítulo:

- se ha desarrollado una formulación fluida cuasi-unidimensional de las ecuaciones que describen el flujo de electrones lo cual ha permitido un análisis más adecuado de los distintos términos. En particular, ha sido posible realizar una comparación con un modelo unidimensional habiéndose obtenido resultados muy positivos lo cual era inviable con el modelo anterior.
- el nuevo método tiene en cuenta el calentamiento Joule sobre los electrones en la dirección paralela a las líneas de campo.
- con la implementación de una ecuación de continuidad es posible la modelización de motores de doble etapa.
- desde un punto de vista numérico el hecho de que la malla magnética no es uniforme ha sido tenido en cuenta y un profundo análisis de estabilidad ha sido realizado obteniendo como resultado un aumento del paso temporal de electrones con respecto al modelo anterior.

## Capítulo 6

# Interacción plasma-pared.

### 6.1. Introducción

La interacción plasma-pared es un problema ampliamente estudiado y que tiene una importancia muy elevada en el funcionamiento de los motores Hall. Sin embargo, una solución totalmente satisfactoria al mismo todavía no ha sido encontrada. En este proyecto lo que se proponen son mejoras a modelos anteriores así como nuevos modelos para problemas no analizados hasta ahora.

A efectos del plasma existen tres tipos de paredes fundamentalmente:

- paredes metálicas del ánodo.
- paredes cerámicas laterales.
- electrodos intermedios (activos y pasivos).

Como ya se mencionó en el capítulo 3 la hipótesis de cuasineutralidad es válida en todo el motor salvo en capas delgadas junto a las paredes donde aparecen vainas no cuasineutras en las cuales el plasma sufre modificaciones en las distintas variables para poder verificar las condiciones de contorno impuestas por la pared. Así, por ejemplo, para una pared cerámica el hecho de que el flujo de carga neto hacia la pared deba ser nulo obliga a la existencia de una vaina que tienda a decelerar a los electrones y a acelerar a los iones pues en la región cuasineutra el flujo de los primeros es mucho mayor que el de los segundos. Por ello, en la

vaina es necesaria la aparición de una caída de potencial hacia las paredes. De forma análoga junto a paredes metálicas como la del ánodo o junto a electrodos es necesaria la existencia de este tipo de capas delgadas.

Las vainas tienen un espesor del orden de la longitud del Debye, mucho menor que la longitud típica del motor por lo que el problema puede considerarse plano. Además se considerará que el problema es fundamentalmente unidimensional con lo que cualquier velocidad paralela a las paredes no será considerada. Una característica asociada a las vainas y derivada de su pequeño espesor es que tanto los términos no estacionarios como las colisiones son despreciables y por tanto, dentro de la vaina las ecuaciones que gobiernan el movimiento de cada especie son las de conservación de masa y energía.

Desde el punto de vista del acoplamiento con el resto del código de simulación, puesto que tanto el método PIC como el método de electrones parten de la hipótesis de cuasineutralidad, estas capas delgadas no pueden incluirse en ellos directamente. Así, las condiciones de contorno a imponer en ambos métodos no corresponden a las de la pared sino a las de transición a vaina. El análisis de las vainas se hace por separado permitiendo relacionar las variables de la pared con las de transición a vaina y es esto precisamente lo que se presenta en este capítulo.

Algunas de las variables más importantes a calcular son el flujo de energía total, flujo de calor, flujo neto de carga, etc. pues son las que necesitan tanto el método de partículas como el de electrones para calcular pérdidas energéticas, y con ello eficiencias.

En lo referente al ánodo y a las paredes cerámicas se propone una mejora a los análisis hasta ahora realizados [4, 53, 54, 55] basado en la utilización de funciones de distribución truncadas en la transición a vaina.

En cuanto a los electrodos activos se desarrolla un nuevo modelo en la línea de los anteriores con objeto de poder simular motores de doble etapa con electrodo intermedio activo. En este caso se presentan dos modelos, uno de los cuales es el más indicado para su utilización en HPHall.

Por otro lado, los electrodos pasivos pueden modelarse bajo ciertas hipótesis como paredes cerámicas aunque el interés de los mismos para su uso en motores Hall no es tan alto como el de electrodos activos.

## 6.2. Análisis del ánodo.

Al ánodo llegan tanto un flujo de electrones como de iones siendo el primero mucho mayor de forma que hay una corriente neta de carga saliendo del ánodo y de la vaina. Debido a la caída de potencial hacia el ánodo, parte de los electrones son repelidos por la vaina pues no tienen suficiente energía como para sobrepasar dicha barrera potencial. Por contra, los electrones que sobrepasan dicha barrera y llegan al ánodo son recogidos por éste dando lugar, junto a los iones, a la intensidad de descarga.

Como consecuencia de lo anterior la función de distribución de electrones en la transición a vaina no puede suponerse exactamente maxwelliana pues los electrones que llegan al ánodo no vuelven, mientras que el resto sí lo hacen al ser repelidos. Una manera de representar este hecho es suponer que la función de distribución tiene la forma de una maxwelliana truncada, sin electrones con velocidades inferiores a la velocidad que les permite sobrepasar la barrera potencial de la vaina. Por otra parte la función de distribución en la transición debe tener su máximo en  $v_x = 0$  debido a que todo electrón que entra en la vaina y es repelido por ésta cuando vuelve a pasar por la transición a vaina tiene una velocidad igual y de sentido contrario a la que tenía cuando entró en la vaina.

Las ecuaciones de conservación de masa y de energía para los electrones son:

$$n_e u_{xe} = \text{cte.} = g_{xeB} = n_{eB} u_{xeB} \quad (6.1)$$

$$\frac{1}{2} m_e u_{xe}^2 - e\phi = \text{cte.} = \frac{1}{2} m_e u_{xeB}^2 - e\phi_B \quad (6.2)$$

donde B representa genéricamente el punto (o superficie) de transición a vaina y A representa el ánodo.

A la vista de esta expresión sólo llegan al ánodo aquellos electrones con una velocidad en la transición a vaina tal que:

$$v_{xeB} \geq \sqrt{\frac{2e\phi_{AB}}{m_e}}$$

donde  $\phi_{AB} = \phi_B - \phi_A$  representa la caída de potencial en la vaina de ánodo cumpliéndose que en todo el ánodo el potencial coincide con el potencial de descarga del motor ( $\phi_A \equiv V_d$ ).

Por otro lado el código de electrones supone en la región cuasineutra una función de distribución completa (no truncada). Por ello es necesario conectar ambos modelos de una forma adecuada para lo cual se distingue entre:

- punto  $B^+$ : representa la transición a vaina desde el punto vista de la región cuasineutra donde la distribución de velocidades viene caracterizada por variables macroscópicas calculadas a través del modelo de partículas y el de electrones.
- punto  $B^-$ : representa la transición a vaina desde el punto vista de la vaina donde la distribución de velocidades sigue una maxwelliana truncada en la dirección perpendicular a la pared y una maxwelliana completa en las direcciones paralelas.

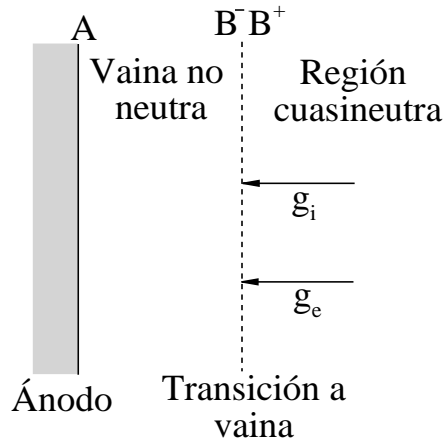


Figura 6.1: Esquema de flujos y regiones en la vaina de ánodo

La manera de conectar ambos puntos es obligar a que la densidad de electrones, flujo de electrones y temperatura sean iguales para ambas distribuciones. Esto es equivalente a suponer que existe una capa de muy alta colisionalidad y muy delgada que rellena la cola de la maxwelliana truncada hasta completarla. En la figura 6.2 se muestran las dos distribuciones que se pretenden conectar.

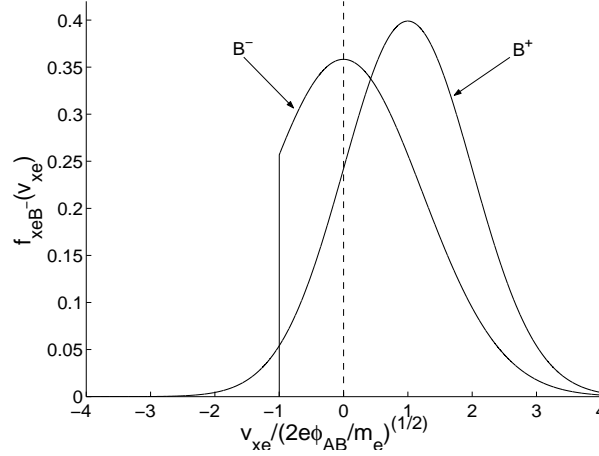


Figura 6.2: Funciones de distribución a conectar en la transición a vaina de ánodo

Así, si denominamos  $n_{eB}$ ,  $g_{xeB}$  y  $T_{eB}$  a los valores anteriores ha de ocurrir que:

$$n_{eB} = \int_{\Omega(v_{xe})} f_{xeB}(v_{xe}) dv_{xe}$$

$$g_{xeB} = \int_{\Omega(v_{xe})} v_{xe} f_{xeB}(v_{xe}) dv_{xe}$$

$$\frac{3}{2} n_{eB} T_{eB} = \int_{\Omega(\vec{v}_e)} (1/2) m_e (\vec{v}_e - \vec{u}_{eB})^2 f_{eB}(\vec{v}_e) d\vec{v}_e$$

donde  $f_{xeB}(v_{xe})$  y  $f_{eB}(\vec{v}_e)$  representan la función de distribución de electrones en el punto  $B$  ( $B^+$  o  $B^-$ ) unidimensional y tridimensional respectivamente,  $\vec{u}_{eB}$  es el vector velocidad media en  $B$  cuya única componente no nula es  $u_{xeB}$  y  $\vec{v}_e$  es el vector velocidad de partículas cuyas tres componentes son no nulas. Los valores  $n_{eB}$ ,  $g_{xeB}$  y  $T_{eB}$  se corresponden con los que caracterizan la distribución completa de la región cuasineutra. Para la función de distribución maxwelliana truncada los valores de las variables macroscópicas pueden calcularse a través de su definición cinética pues la función de distribución es conocida:

$$f_{xeB^-}(v_{xe}) = n_{eB}^* \sqrt{\frac{m_e}{2\pi k T_{eB}^*}} \exp\left(-\frac{m_e}{2k T_{eB}^*} v_{xe}^2\right) \quad \text{si } v_{xe} \geq -\sqrt{\frac{2e\phi_{AB}}{m_e}}$$

$$f_{xeB^-}(v_{xe}) = 0 \quad \text{si } v_{xe} < -\sqrt{\frac{2e\phi_{AB}}{m_e}}$$

En las expresiones anteriores  $n_{eB}^*$  y  $T_{eB}^*$  son constantes que caracterizan la función de distribución y que coincidirían con los valores de densidad y temperatura locales si  $\phi_{AB} \rightarrow \infty$ , pero para una maxwelliana truncada como ésta no ocurre así. Para verlo basta con realizar las integrales anteriores obteniéndose que:

$$n_{eB} = n_{eB}^* \frac{1 + \operatorname{erf}(\sqrt{e\phi_{AB}/kT_{eB}^*})}{2}$$

$$g_{xeB} = n_{eB} u_{xeB} = n_{eB}^* \sqrt{\frac{kT_{eB}^*}{2\pi m_e}} \exp\left(-\frac{e\phi_{AB}}{kT_{eB}^*}\right) \quad (6.3)$$

$$\frac{T_{eB}}{T_{eB}^*} = 1 + \frac{m_e u_{xeB}^2}{3kT_{eB}^*} - \frac{2}{3\sqrt{\pi}} \left( \sqrt{\frac{2m_e u_{xeB}^2}{kT_{eB}^*}} + \sqrt{\frac{e\phi_{AB}}{kT_{eB}^*}} \right) \frac{\exp\left(-\frac{e\phi_{AB}}{kT_{eB}^*}\right)}{1 + \operatorname{erf}(\sqrt{e\phi_{AB}/kT_{eB}^*})}$$

donde  $\operatorname{erf}(x)$  representa la función error de  $x$ .

Las tres ecuaciones anteriores permiten relacionar  $n_{eB}^*$ ,  $T_{eB}^*$  y  $u_{xeB}$  con  $n_{eB}$ ,  $T_{eB}$  y  $\phi_{AB}$  constituyendo un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. Con esto quedan conectadas ambas funciones de distribución a través de sus variables locales más características.

Una vez resuelto el problema de la transición a la vaina a partir de las variables de la región cuasineutra se puede afrontar la resolución de la vaina. Para ello es necesario calcular la función de distribución en el interior de la misma que se obtiene a partir de la dicha función en  $B^-$  y con la ecuación de conservación de energía total para los electrones (6.2). Operando con ellas se puede obtener que:

$$f_{xe}(v_{xe}, \phi) = n_{eB}^* \sqrt{\frac{m_e}{2\pi kT_{eB}^*}} \exp\left(-\frac{1}{kT_{eB}^*} \left(\frac{1}{2} m_e v_{xe}^2 + e(\phi_B - \phi)\right)\right) \quad \text{si } v_{xe} \geq -\sqrt{\frac{2e(\phi - \phi_A)}{m_e}}$$

$$f_{xe}(v_{xe}, \phi) = 0 \quad \text{si } v_{xe} < -\sqrt{\frac{2e(\phi - \phi_A)}{m_e}} \quad (6.4)$$



Conocida la función de distribución en el interior de la vaina basta con calcular las distintas magnitudes de interés a través de su definición cinética. Así, por ejemplo el flujo de energía total de electrones hacia la vaina se calcula como:

$$q_{xeB}^{tot} = \int_{\Omega(\vec{v}_e)} (1/2) m_e v_e^2 v_{xe} f_{eB}(\vec{v}_e, \phi_B) d\vec{v}_e = g_{xeB} (2kT_{eB}^* + e\phi_{AB}) \quad (6.5)$$

Además, el flujo de carga electrónica,  $j_{xeB}$ , el número de Mach en B,  $M_{xeB}$  y el flujo de calor de electrones hacia la vaina,  $q_{xeB}$  resultan ser:

$$j_{xeB} = en_{eB} u_{xeB}$$

$$M_{xeB} = \frac{u_{xeB}}{\sqrt{kT_{eB}/m_e}} \quad (6.6)$$

$$q_{xeB} = q_{xeB}^{tot} - \frac{5}{2} g_{xeB} kT_{eB} = g_{xeB} (2kT_{eB}^* - \frac{5}{2} kT_{eB} + e\phi_{AB})$$

En estas expresiones se ha utilizado como velocidad del sonido para los electrones una que tiene en cuenta únicamente la temperatura de electrones despreciándose la de iones.

Por otro lado, las ecuaciones de conservación de masa y energía total para iones simples y dobles pueden escribirse por separado como:

$$n_{i+} u_{xi+} = \text{cte.} = g_{xi+B} = n_{i+B} u_{xi+B} \quad (6.7)$$

$$\frac{1}{2} m_{i+} u_{xi+}^2 + e\phi = \text{cte.} = \frac{1}{2} m_{i+} u_{xi+B}^2 + e\phi_B \quad (6.8)$$

$$n_{i++} u_{xi++} = \text{cte.} = g_{xi++B} = n_{i++B} u_{xi+B} \quad (6.9)$$

$$\frac{1}{2} m_{i++} u_{xi++}^2 + 2e\phi = \text{cte.} = \frac{1}{2} m_{i++} u_{xi++B}^2 + 2e\phi_B \quad (6.10)$$

En lo que se refiere a neutros se puede decir que la vaina no les afecta en ninguna forma pues carecen de carga eléctrica verificando que los flujos de masa y energía cinética se conservan en la vaina.

Con todo ello es posible calcular el flujo de carga neta hacia el ánodo como:

$$j_A = j_B = e(g_{xi+A} + 2g_{xi++A} - g_{xeA}) = e(g_{xi+B} + 2g_{xi++B} - g_{xeB})$$

La existencia de la vaina de ánodo supone un gasto energético a tener en cuenta a la hora de hacer los balances globales. Esta potencia para todo el ánodo se calcula como:

$$P_{elec,a} = \int_{S_A} j_A \phi_{AB} dS$$

Como comentario final cabe destacar que los modelos como el descrito en [52] para el ánodo asumen que  $T_{eB} = T_{eB}^*$  lo cual a la vista de las expresiones aquí obtenidas es incorrecto. Una comparación de ambos modelos se muestra en la figura (6.3) donde se representan algunas de las variables más interesantes al variar la caída de potencial en la vaina.

En relación a la figura (6.3) se pueden señalar algunos aspectos interesantes:

- cuando la caída de potencial se hace grande frente a la temperatura de electrones ambos modelos son semejantes. Esto tiene sentido pues cuanto mayor es  $\phi_{AB}$ , la función de distribución truncada se aproxima más a ser una maxwelliana completa al repeler cada vez a electrones de mayor energía. Gráficamente esto se entiende a través de la figura (6.2) anteriormente mostrada.
- para caídas de potencial bajas los resultados son muy diferentes. En particular, para  $\phi_{AB} = 0$  se tiene que con el nuevo modelo el número de Mach alcanzado es aproximadamente 0.9 y con el antiguo modelo de [52] tan solo 0.4. Un análisis más completo considerando los iones de forma similar a los electrones como el mostrado en [53] muestra que dicha condición de salto de potencial nulo ha de ocurrir para un flujo sónico de electrones. Ésta es una de las principales ventajas de este modelo frente al propuesto por Gallardo en [52] o el de Dorf et al. en [54].

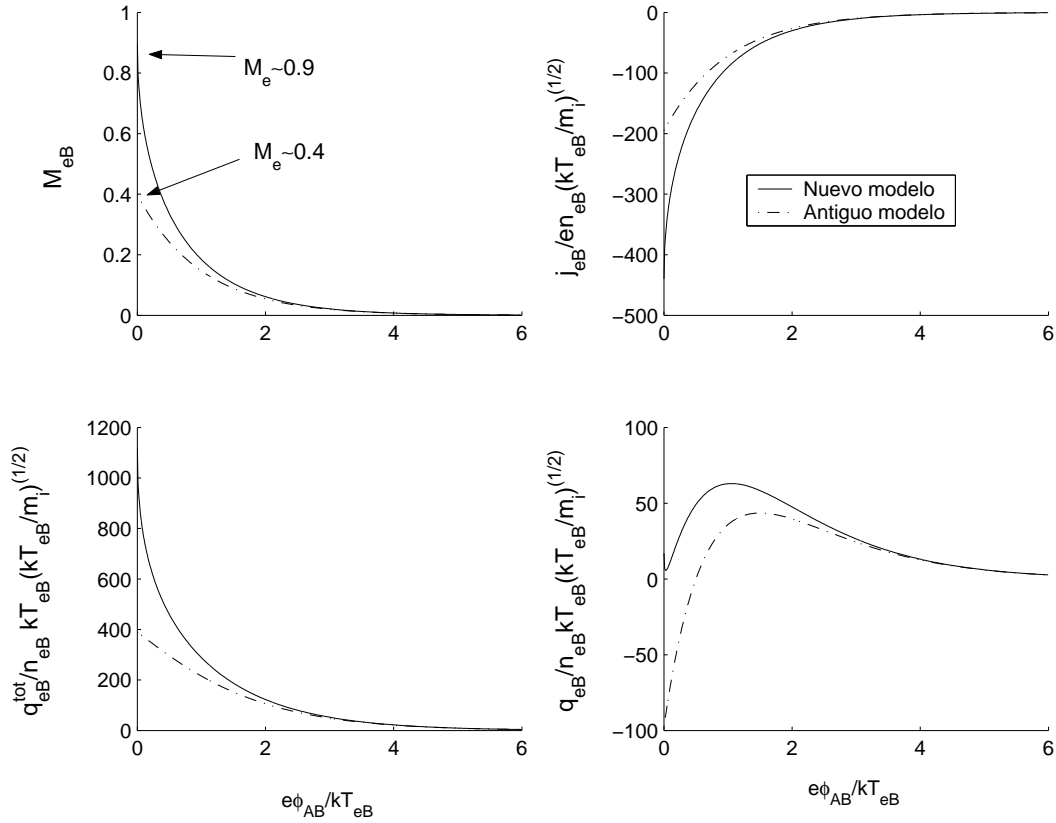


Figura 6.3: Variables adimensionales características del ánodo en función de la caída de potencial en vaina: número de Mach de electrones, flujo de carga electrónica, flujo de energía total y flujo de calor hacia el ánodo

- la conducción de calor hacia ánodo es siempre positiva con el nuevo modelo, mientras que con el antiguo existen zonas de conducción negativa y positiva. En particular para el caso  $\phi_{AB} = 0$  el nuevo modelo predice una conducción de calor casi nula mientras que el modelo antiguo predice un valor fuertemente negativo, es decir, que el ánodo está calentando el plasma lo cual no parece ser correcto a tenor de los experimentos.
- otro problema asociado al antiguo modelo es que al no truncar la función de distribución en la vaina el flujo de electrones en el interior de la misma no es constante lo cual va en contra de las ecuaciones de conservación.

### 6.3. Interacción plasma-pared en la región cercana al ánodo en HPHall.

Uno de los principales avances en lo referente a la región cercana al ánodo es la implementación de un método capaz de reproducir campos magnéticos curvos en los cuales la superficie de ánodo no es una superficie de corriente. El modelo que se presenta en este proyecto permite no solo solventar este problema sino que además impone de una manera más correcta la condición de vaina de ánodo que anteriormente se trataba a través de magnitudes promedio.

La base del método consiste en suponer que la superficie de ánodo es una superficie de corriente más de forma que temperatura y potencial termalizado son constantes en toda la transición a vaina de ánodo. Para ello es necesario asignar un valor de coordenada magnética  $\lambda$  al ánodo tomado como la media geométrica extendida a toda la superficie.

Con ello, el ánodo puede ser tratado como una superficie de corriente más a la hora de integrar las ecuaciones de electrones. En particular, la condición de contorno que se impone durante todo el proyecto es la de flujo de calor a ánodo nulo.

Como se ha comentado en el modelo de electrones otra de las condiciones de contorno es la de potencial de descarga determinando. Una vez se ha analizado la interacción plasma-pared para el caso del ánodo es posible mostrar la manera de imponer dicha condición.

Del análisis del ánodo se ha derivado que la corriente de carga que atraviesa localmente la vaina depende, entre otros, del salto de potencial existente entre la superficie de ánodo (a potencial único) y el punto de la transición a vaina correspondiente. Por tanto, para los distintos puntos de la transición a vaina de ánodo hay distintos saltos de potencial y con ello distintos valores de flujo de carga local.

Un detalle a tener en cuenta es que el modelo desarrollado para la vaina de ánodo sólo admite saltos de potencial en vaina positivos correspondientes a la situación más habitual en

motores Hall. Sin embargo, por ser HPHall un código no estacionario la situación con salto de potencial negativo puede darse a menudo. Para esos casos, el modelo supone una corriente igual a del caso con salto de potencial nulo (caso sin vaina). Esta hipótesis simplificativa es aceptable pues para los casos con salto de potencial negativo los electrones entran a la vaina con velocidad supersónica y son los iones los que deberían ser repelidos. Este aspecto es una de las mejoras con respecto al modelo anterior pues en éste, al hacerse un tratamiento promedio de la vaina de ánodo, esa situación de salto de potencial negativo se trataba como si fuese positivo incurriendo en importantes errores a la hora de determinar la corriente de carga local.

A la hora de imponer la condición de contorno, de la integración de las ecuaciones de electrones, el potencial termalizado en la transición a vaina de ánodo es conocido y con ello el potencial eléctrico en toda ella (nótese que no es constante debido a la variación de la densidad). Además, dado que el potencial de ánodo es conocido, el salto de potencial también lo es con lo que se puede calcular la corriente de carga local en cada punto de la transición a vaina de ánodo y por integración el valor de la intensidad total que sale del ánodo.

Por otro lado, de la integración de la ecuación de continuidad el valor de la corriente eléctrica que sale de la transición a vaina es conocido. Por tanto, por continuidad este valor y el calculado anteriormente deben ser iguales. Si no lo son, es necesario modificar el valor de corriente en el cátodo (condición inicial en la integración de las ecuaciones) hasta conseguir verificar dicha condición.

Lo que aquí se ha explicado no es más que un método shooting, un tanto más complicado por el tratamiento de la vaina de ánodo. De igual forma que se ha planteado el procedimiento para conseguir el funcionamiento a potencial de descarga constante se puede realizar para potencia eléctrica constante o intensidad de descarga constante. Estas tres opciones han sido implementadas con éxito en el código aumentando así la versatilidad del mismo.

## 6.4. Análisis de las paredes cerámicas.

El problema de las paredes cerámicas es algo más complejo que el de la vaina de ánodo. Ello es debido a varias razones:

- en primer lugar, los electrones que son absorbidos por la pared al impactar contra ella producen la emisión de electrones secundarios de baja energía pero que tienen su importancia. Este fenómeno es conocido habitualmente como emisión secundaria de electrones (SEE: *Secondary electron emission*). Para estimar este flujo de electrones procedentes de la pared se puede utilizar el modelo propuesto en [28] que lo relaciona con el flujo de electrones que impactan contra la pared (electrones primarios) a través de:

$$g_s = -\delta_w g_p \quad (6.11)$$

En la anterior expresión el signo menos indica que ambos flujos son de sentido contrario como se describe en la figura (6.4) donde se puede observar el criterio de signos para los distintos flujos en la vaina y la nomenclatura utilizada.

El parámetro  $\delta_w$  depende de la energía de los electrones incidentes y para un haz monoenergético de energía  $E$  se puede poner como:

$$\delta_w = \left( \frac{E}{E_1} \right)^p \quad (6.12)$$

donde  $E_1$  es la energía del haz necesaria para que el flujo emitido y absorbido sea el mismo. Los valores de las constantes de la ley utilizadas en el presente proyecto son  $p \simeq 0,576$  y  $E_1 \simeq 47$  eV.

- en segundo lugar, la incapacidad del cerámico para conducir electricidad obliga a imponer la condición de flujo de carga eléctrica neta hacia la pared nulo localmente.
- en último lugar, las paredes cerámicas pueden alcanzar el límite de saturación de carga (CSL: *Charge saturation limit*) a partir del cual la relación entre el flujo de electrones absorbidos y emitidos se puede asumir constante.

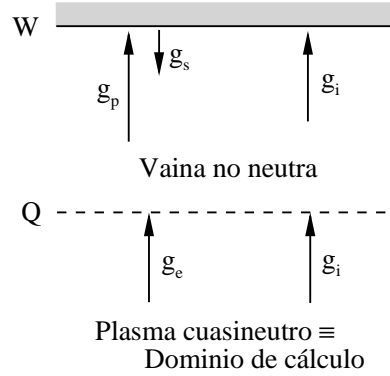


Figura 6.4: Esquema de los flujos en la vaina de una pared cerámica. El punto Q representa la transición a vaina y el punto W representa la pared. El subíndice p denota electrones primarios (incidentes), el subíndice s denota electrones secundarios (emitidos) y el subíndice e electrones en la región cuasineutra

A continuación se presentan las mejoras al modelo de Ahedo et al. descrito en [1] y que se centran en tres líneas fundamentalmente:

1. El modelo tal y como está explicado en [1] asume que el flujo de iones en la transición a vaina es sónico. Esto verifica la condición de Bohm, pero sin embargo no es la única posibilidad para un flujo no estacionario como el que aquí se trata. Es más el código de simulación predice flujos supersónicos por lo que es necesario extender el modelo de vaina al caso supersónico.
2. Por otro lado la formulación de [1] padece del mismo problema que en el caso del ánodo. Al no usar una función de distribución truncada el flujo de electrones en el interior de la vaina no es constante lo cual va en contra de la conservación de masa. Es cierto que esto solo se hace notar cuando la caída de potencial en vaina es pequeña pero precisamente por ser HPHall un modelo no estacionario esta situación se da con relativa frecuencia.
3. La existencia de iones dobles debe ser considerada apropiadamente en el modelo de vaina para poder modelar adecuadamente motores de alto impulso específico.

El modelo de Ahedo et al. se basa en suponer una única especie de electrones en la región cuasineutra y un modelo de dos especies electrónicas en la vaina, una de electrones primarios (p) que se dirigen hacia la pared y otra de electrones secundarios (s), que provienen ella. Ahora bien, es necesario conectar ambos modelos en la transición a vaina para lo cual se acude a exigir la continuidad de una serie de magnitudes. En principio esto es similar a lo que se hace en ánodo pues se supone que los electrones secundarios, de mucha menor energía que los electrones de la región cuasineutra son termalizados totalmente en una capa muy delgada.

De nuevo las ecuaciones que gobiernan la vaina son ecuaciones de conservación, en este caso para cuatro especies: iones simples, iones dobles, electrones primarios y electrones secundarios:

$$n_{i+}u_{xi+} = \text{cte.} = g_{xi+Q} = n_{i+Q}u_{xi+Q} \quad (6.13)$$

$$n_{i++}u_{xi++} = \text{cte.} = g_{xi++Q} = n_{i++Q}u_{xi++Q} \quad (6.14)$$

$$n_p u_{xp} = \text{cte.} = g_{xpW} = n_{pW} u_{xpW} \quad (6.15)$$

$$n_s u_{xs} = \text{cte.} = g_{xsW} = n_{sW} u_{xsW} \quad (6.16)$$

$$\frac{1}{2}m_{i+}u_{xi+}^2 + e\phi = \text{cte.} = \frac{1}{2}m_{i+}u_{xi+Q}^2 + e\phi_Q \quad (6.17)$$

$$\frac{1}{2}m_{i++}u_{xi++}^2 + 2e\phi = \text{cte.} = \frac{1}{2}m_{i++}u_{xi++Q}^2 + 2e\phi_Q \quad (6.18)$$

$$\frac{1}{2}m_e u_{xp}^2 - e\phi = \text{cte.} = \frac{1}{2}m_e u_{xpQ}^2 - e\phi_Q \quad (6.19)$$

$$\frac{1}{2}m_e u_{xs}^2 - e\phi = \text{cte.} \simeq -e\phi_W \quad (6.20)$$

Nótese que en este caso el potencial de pared es desconocido a diferencia de lo que ocurría en ánodo. La condición adicional que permite calcularlo es la de corriente nula hacia la pared.

En este modelo se desprecia la energía de emisión de los electrones secundarios por ser del orden de la temperatura de pared, mucho menor que la energía ganada por éstos en la vaina y que la temperatura de los primarios. Así los electrones secundarios se convierten en un haz monoenergético acelerado por el salto de potencial de la vaina.



En cuanto a los electrones primarios sucede algo similar a lo que ocurría en ánodo, es decir, hay que truncar la función de distribución para tener en cuenta que los primarios de mayor energía son capaces de superar la barrera de potencial y son absorbidos por la pared. Como consecuencia de esto, la función de distribución de primarios se obtiene de forma análoga al caso del ánodo mostrándose aquí tan solo el resultado:

$$f_{xp}(v_{xp}, \phi) = n_{pQ}^* \sqrt{\frac{m_e}{2\pi k T_{pQ}^*}} \exp\left(-\frac{1}{k T_{pQ}^*} \left(\frac{1}{2} m_e v_{xp}^2 + e(\phi_Q - \phi)\right)\right) \quad \text{si } v_{xp} \geq -\sqrt{\frac{2e(\phi - \phi_W)}{m_e}}$$

$$f_{xp}(v_{xp}, \phi) = 0 \quad \text{si } v_{xp} < -\sqrt{\frac{2e(\phi - \phi_W)}{m_e}} \quad (6.21)$$

En la anterior expresión las constantes  $n_{pQ}^*$  y  $T_{pQ}^*$  no son la densidad ni la temperatura de primarios aunque están relacionados con dichas variables. La manera de relacionar  $n_{pQ}$  y  $n_{pQ}^*$  es a través de la definición cinética de densidad en el punto Q obteniéndose que:

$$n_{pQ} = n_{pQ}^* \frac{1 + \operatorname{erf}\left(\sqrt{e\phi_{WQ}/kT_{pQ}^*}\right)}{2}$$

A partir de la función de distribución anterior, la densidad de primarios en la vaina y el flujo de partículas se obtienen como:

$$n_p(\phi) = n_{pQ} \exp\left(\frac{e(\phi - \phi_Q)}{kT_p}\right) \frac{1 + \operatorname{erf}\left(\sqrt{e(\phi - \phi_W)/kT_{pQ}^*}\right)}{1 + \operatorname{erf}\left(\sqrt{e\phi_{WQ}/kT_{pQ}^*}\right)} \quad (6.22)$$

$$g_{xpQ} = g_{xpW} = n_{pQ} \frac{2}{1 + \operatorname{erf}\left(\sqrt{e\phi_{WQ}/kT_{pQ}^*}\right)} \exp\left(-\frac{e\phi_{WQ}}{kT_{pQ}^*}\right) \sqrt{\frac{kT_{pQ}^*}{2\pi m_e}}$$

Obsérvese que las expresiones anteriores reproducen las expresiones del modelo simplificado de Ahedo *et al.* para el caso de salto de potencial infinito, pero en el caso general es necesario introducir una serie de factores correctores como los utilizados en este modelo.

Para poder calcular el flujo emitido de secundarios se ha de transformar la expresión (6.12) pues no se trabaja con un haz monoenergético de primarios sino que tienen una cierta dispersión. Para ello basta con promediar a través de la función de distribución como se propone en [28] obteniéndose que:

$$\delta_w = \left( \frac{T_{pQ}^*}{T_1} \right)^p \quad \text{con} \quad kT_1 = \frac{E_1}{[\Gamma(2+p)]^{1/p}} \quad (6.23)$$

Por otro lado, la expresión matemática de la condición de corriente nula es:

$$j_{xiW} + j_{xeW} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad g_{xi+W} + 2g_{xi++W} - g_{xpW} - g_{xsW} = 0 \quad (6.24)$$

Además, la expresión de cuasineutralidad en el punto Q se expresa como:

$$n_{sQ} + n_{pQ} = n_{eQ} = n_{i+Q} + 2n_{i++Q} \quad (6.25)$$

Un parámetro de especial importancia en el modelo actual es el número de Mach iónico. En este caso se define el número de Mach asociado a los iones simples de la forma:

$$M_{iQ} = \frac{u_{xi+Q}}{u_{Bohm}} = \frac{u_{xi+Q}}{\sqrt{kT_{eQ}/m_{i+}}} \quad (6.26)$$

Otro parámetro de importancia es la carga local equivalente en la transición a vaina definida como:

$$q_Q = \frac{n_{eQ}}{n_{iQ}} = \frac{n_{i+Q} + 2n_{i++Q}}{n_{i+Q} + n_{i++Q}}$$

A la vista de la anterior definición la carga equivalente varía entre 1 y 2 tomando el valor de la unidad cuando solo hay iones simples. En la práctica, puesto que las densidades de iones dobles que aparecen son uno o dos órdenes de magnitud inferiores a la de iones simples, el valor de la carga equivalente es próximo a uno.

### Saturación de carga

El fenómeno de saturación de carga aparece a partir del momento en el cual el campo eléctrico evaluado en la pared es nulo. A partir de esa situación aparece una barrera de potencial para los electrones secundarios que hace el flujo emitido real sea superior al efectivo. Debido a las hipótesis realizadas en este modelo dicha situación se representa suponiendo que una vez alcanzado el límite de saturación el valor del parámetro  $\delta_w$  se mantiene constante.

En primer lugar, la estructura del campo eléctrico en el interior de la vaina viene descrita por la ecuación de Poisson que para una capa tan delgada como la vaina queda reducida a una ecuación unidimensional:

$$\frac{d^2\phi}{dy^2} = \frac{e(n_p + n_s - n_{i+} - 2n_{i++})}{\epsilon_0} \quad (6.27)$$

donde  $y$  es una coordenada espacial perpendicular a la pared y que se anula en ella.

Esta ecuación de Poisson admite una integral primera llamada potencial de Sadgeev de la forma:

$$\begin{aligned} U(e\phi) = n_p k T_{pQ}^* \left( 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\exp(-e(\phi - \phi_W)/kT_{pQ}^*) \sqrt{e(\phi - \phi_W)/kT_{pQ}^*}}{1 + \operatorname{erf}(\sqrt{e(\phi - \phi_W)/kT_{pQ}^*})} \right) + m_e n_s u_{xs}^2 + \\ + m_{i+} n_{i+} u_{xi+}^2 + m_{i++} n_{i++} u_{xi++}^2. \end{aligned} \quad (6.28)$$

Las derivadas primera y segunda del potencial de Sadgeev se obtienen como:

$$\begin{aligned} U(e\phi)' &= n_p + n_s - n_{i+} - 2n_{i++} \\ U(e\phi)'' &= \frac{n_p}{kT_{pQ}^*} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\exp(-e(\phi - \phi_W)/kT_{pQ}^*)}{1 + \operatorname{erf}(\sqrt{e(\phi - \phi_W)/kT_{pQ}^*})} \frac{1}{\sqrt{e(\phi - \phi_W)/kT_{pQ}^*}} \right) - \frac{n_s}{m_e u_{xs}^2} + \\ &\quad - \frac{n_{i+}}{m_{i+} u_{xi+}^2} - \frac{4n_{i++}}{m_{i++} u_{xi++}^2} \end{aligned} \quad (6.29)$$

Por la definición de potencial eléctrico es posible calcular el campo normal a la pared evaluado en ella misma,  $E_{N,W}$ , como:

$$E_{N,W} = \frac{kT_p}{e\ell_D} \sqrt{2(\tilde{U}(e\phi_W) - \tilde{U}(e\phi_Q))} \quad (6.30)$$

donde  $\ell_D$  es la longitud de Debye definida con la pseudo-temperatura  $T_{pQ}^*$  y la densidad  $n_{eQ}$  y  $\tilde{U}(e\phi)$  es el potencial de Sadjeev adimensionalizado como  $\tilde{U}(e\phi) = U(e\phi)/(n_{eQ}kT_{pQ}^*)$

La condición de campo eléctrico normal nulo en la pared ( $E_{N,W} = 0$ ) determina el límite de saturación y a diferencia del modelo original de Ahedo et al. el valor del parámetro  $\delta_w$  en saturación depende del número de Mach de iones simples y de la carga equivalente en la transición a vaina.

Los resultados obtenidos con este nuevo modelo para el Xenón y sin iones dobles se muestran en forma adimensional en la figura (6.5).

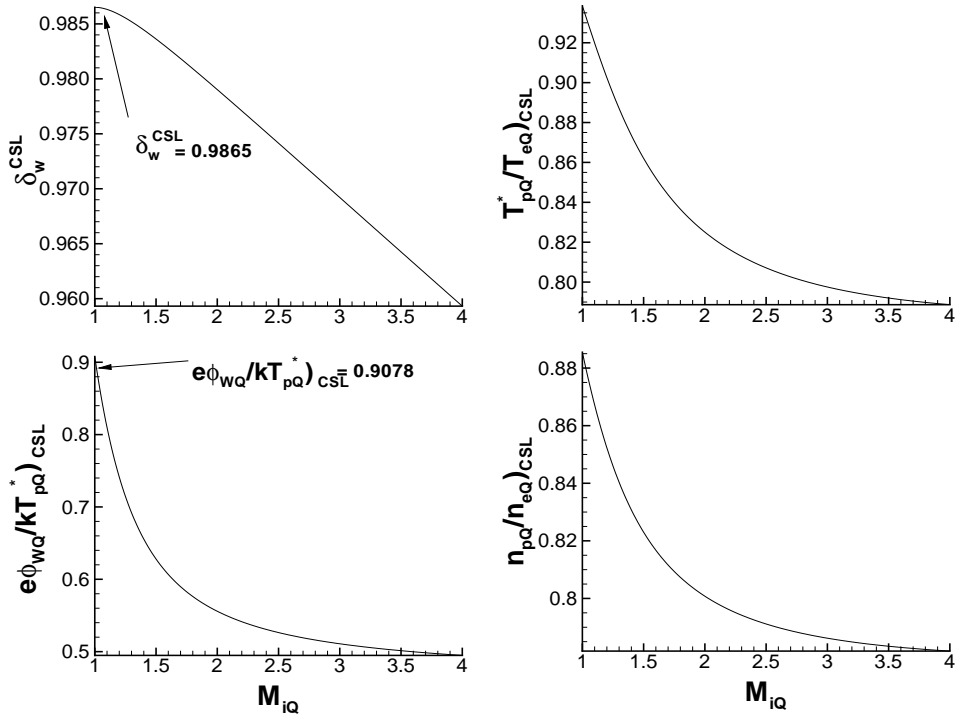


Figura 6.5: Variables para el límite de saturación de carga para el caso sin ionización múltiple

Respecto a la figura (6.5) se pueden hacer diversos comentarios:

- para flujo sónico el valor del parámetro  $\delta_w$  en saturación es  $\delta_w^{CSL} = 0.9865$  frente al valor que se obtenía originalmente en el modelo de Ahedo et al. de  $\delta_w^{CSL} = 0.983$ . Esta diferencia se debe al uso de la función de distribución truncada y a pesar de que pueda parecer pequeña tiene efectos importantes sobre la caída de potencial en saturación, que depende de  $(1 - \delta_w)$ . En particular el resultado obtenido con el nuevo modelo es de  $e\phi_{WQ}^{CSL}/kT_{pQ}^* = 0.9078$  frente al valor de Ahedo et al. de  $e\phi_{WQ}^{CSL}/kT_{pQ}^* = 1.02$  que supone una diferencia del 10 %. Además si se estima la diferencia en términos del parámetro  $1/(1 - \delta_w)$ , importante para el flujo de primarios en la vaina, la diferencia es del 25 %.
- en cuanto a la influencia del número de Mach se observa que cuanto mayor es el flujo de iones menor es el  $\delta_w$  de saturación existiendo una disminución prácticamente lineal con  $M_{iQ}$ . También es interesante observar como para  $M_{iQ} = 4.0$  el valor de la caída de potencial adimensional se reduce hasta casi la mitad. Esto pudiera parecer que se debe a la adimensionalización con  $T_{pQ}^*$  pero la variación de ésta variable es mucho menor.

### Tratamiento de iones dobles

Dada la pequeña importancia en el problema de la interacción en la pared de los iones dobles (a tenor de las diferencias tan importantes en las densidades) para tener en cuenta a estos iones dobles en el modelo se opta por una aproximación sencilla.

En el hipotético caso de que sólo existiesen iones dobles en el canal la velocidad de Bohm de entrada a vaina sería  $\sqrt{2}$  veces superior a la de los iones simples. Por otro lado, ese mismo resultado se obtiene si se supone que no hay colisiones y el problema es estacionario. Por tanto, parece lógico pensar que en una primera aproximación se puede suponer que la velocidad de entrada a vaina de los iones dobles es  $\sqrt{2}$  veces superior a la de iones simples, sea cual sea ésta. Además, gracias a que en la vaina hay conservación de energía, esa misma relación se mantiene para toda la vaina lo cual simplifica los cálculos.

Así pues, en todas las ecuaciones anteriores relacionadas con la vaina se sustituye que:

$$u_{xi++} = \sqrt{2}u_{xi+}$$

Bajo estas hipótesis, la influencia que los iones dobles tienen en la saturación de carga se muestra en la figura (6.6) para el caso sónico:

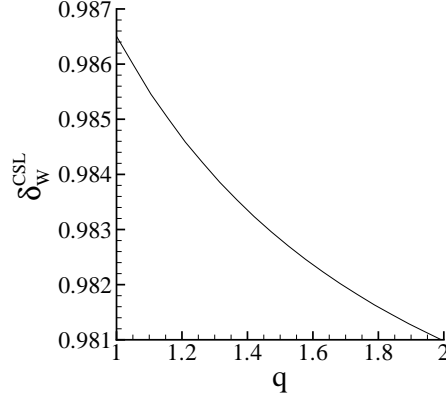


Figura 6.6: Parámetro  $\delta_W$  para el límite de saturación de carga en el caso sónico en función de la carga equivalente

Como se puede observar la presencia de iones dobles tiene efectos similares a aumentar el número de Mach, lo cual es lógico por otra parte. A pesar de haber obtenido la gráfica hasta una carga equivalente de  $q_Q = 2$ , en la práctica solamente valores de como mucho  $q_Q = 1.1$  son utilizados pues en los motores Hall las densidades de iones simples son como mínimo 10 veces superior a las de iones dobles. Para esos casos la variación del parámetro  $1 - \delta_W$  debida a la presencia de iones dobles es pequeña, del orden del 5 % con lo cual queda justificado el haber realizado una hipótesis tan simplificada para su modelización.

### Pérdidas energéticas hacia la vaina

Uno de los parámetros que requiere el modelo de electrones es el flujo de energía total hacia la vaina. Éste se utiliza en la ecuación de energía de electrones presentada en el capítulo anterior y se puede calcular de forma similar a como se hizo en el caso del ánodo aunque se debe tener en cuenta el flujo de energía debido a los electrones secundarios:

$$q_{xeQ}^{tot} = g_{xpW} \left( 2T_{pQ}^* + e\phi_{WQ} \right) - g_{xsW} e\phi_{WQ} = g_{xeW} \left( \frac{2T_{pQ}^*}{1 - \delta_w} + e\phi_{WQ} \right) \quad (6.31)$$

### Resolución del modelo

Con todas las ecuaciones anteriores es posible obtener  $n_{pQ}$ ,  $n_{sQ}$  y  $\phi_{WQ}$  como función de  $n_{eQ}$ ,  $M_{iQ}$ ,  $q_Q$ ,  $T_{pQ}^*$  y  $T_{eQ}$ . En particular, la caída de potencial en la vaina  $\phi_{WQ}$  se obtiene de la relación implícita:

$$\begin{aligned} \frac{e\phi_{WQ}}{kT_{pQ}^*} = & \ln \sqrt{\frac{m_i}{2\pi m_e}} + \ln(1 - \delta_w) + \ln \left( \frac{n_{pQ}}{n_{eQ}} \sqrt{T_{pQ}^*/T_{eQ}} \right) + \\ & - \ln \left( (2(1 - \sqrt{2})/q_Q + (2\sqrt{2} - 1))M_{iQ} \right) - \ln \left( (1 + \operatorname{erf}(\sqrt{e\phi_{WQ}/kT_{pQ}^*}))/2 \right) \end{aligned} \quad (6.32)$$

A la vista de la ecuación se observa en los dos últimos términos del miembro de la derecha la influencia de las distintas novedades introducidas en el modelo: posibilidad de flujo supersónico, formulación basada en distribuciones truncadas y presencia de iones dobles.

Finalmente queda por relacionar  $T_{pQ}^*$  con  $T_{eQ}$  para lo cual, a diferencia de lo que se hacía en el ánodo, se acude a imponer continuidad en  $Q$  de la derivada segunda del potencial de Sadjeev, de especial importancia en el problema de la vaina en pared cerámica. El resultado de imponer dicha condición se muestra a continuación :

$$\frac{n_{pQ}}{kT_{pQ}^*} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\exp(-e\phi_{WQ}/kT_{pQ}^*)}{1 + \operatorname{erf}(\sqrt{e\phi_{WQ}/kT_{pQ}^*})} \frac{1}{\sqrt{(e\phi_{WQ}/kT_{pQ}^*)}} \right) - \frac{n_{sQ}}{m_e v_{xsQ}^2} = \frac{n_{eQ}}{kT_{eQ}} \quad (6.33)$$

A la vista de las expresiones (6.29) se observa que la continuidad de la derivada primera a ambos lados de la transición a vaina supone la cuasineutralidad mientras que la igualdad de la derivada segunda supone la continuidad de la derivada primera de la densidad de electrones respecto al potencial.

A pesar del elevado número de ecuaciones de que se dispone se puede ver mediante análisis dimensional que en forma adimensional el problema presenta tres únicos parámetros libres. En este caso y por facilitar el acoplamiento con HPHall se utilizan como variables adimensionales independientes el número de Mach de iones  $M_{iQ}$ , la temperatura de electrones  $T_{eQ}$  adimensionalizada con  $T_1$  y la carga equivalente en la transición a vaina  $q_Q$ .

### Resultados para el modelo de vaina de pared cerámica

Tras haber obtenido el límite de saturación de carga se presentan los resultados del modelo completo de vaina de pared cerámica en forma adimensional y en función de los parámetros  $M_{iQ}$ ,  $T_{eQ}/T_1$  y  $qQ$ . Dichos resultados se pueden observar en la figura (6.7):

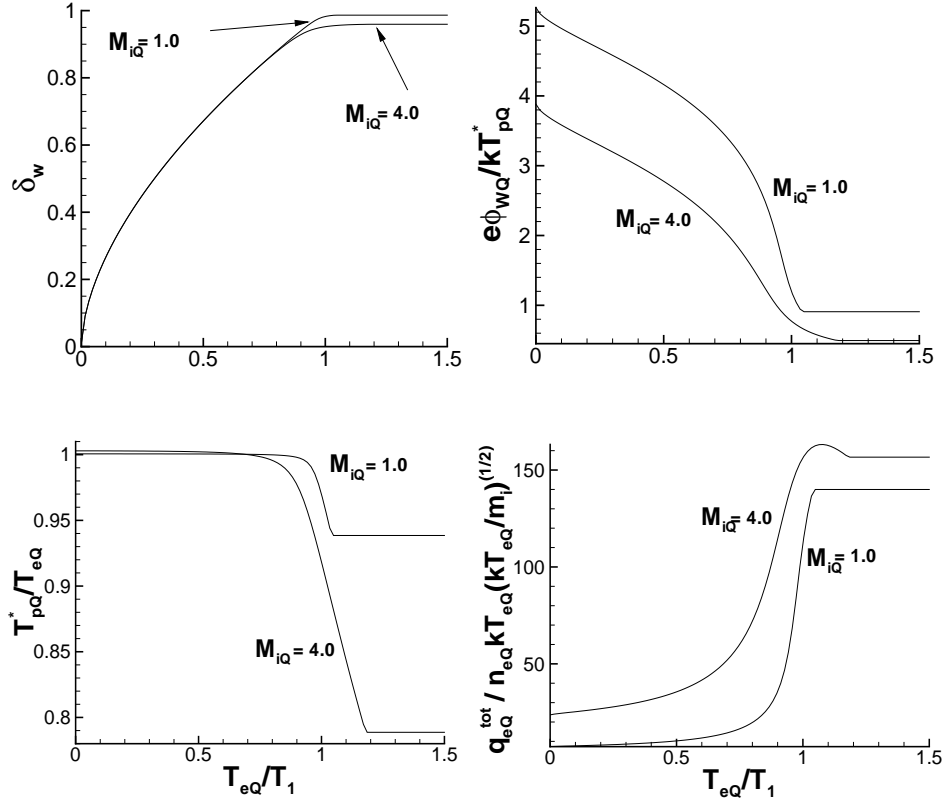


Figura 6.7: Resultados adimensionales para el modelo de vaina de cerámico sin iones dobles

De la gráfica anterior se pueden derivar algunas conclusiones:

- la temperatura de electrones  $T_{eQ}$  a la cual se alcanza la saturación no depende en exceso del número de Mach, manteniéndose en valores adimensionales de  $T_{eQ}/T_1 \sim 1$  que equivalen a temperaturas de  $T_{eQ} \sim 27\text{eV}$ .
- la caída de potencial en vaina adimensional decrece en media 15 % al pasar de un número de Mach de  $M_{iQ} = 1.0$  a  $M_{iQ} = 4.0$  mientras que la pseudo-temperatura de primarios adimensional se mantiene cercana a la unidad hasta alcanzar la saturación. Esto implica



que  $\phi_{WQ}$  adimensionalizado con  $kT_{eQ}/e$  sufre variaciones similares a las anteriores.

- en cuanto a la pérdidas energéticas se observa que crecen con el número de Mach aunque sería necesario analizar más profundamente la influencia de la variable utilizada para adimensionalizar lo cual requiere obtener resultados con HPHall.

Como ya se señaló anteriormente el efecto de iones dobles es semejante a un aumento del número de Mach. De hecho, de las ecuaciones adimensionalizadas de este modelo se deriva que el único término en el que aparece la carga equivalente es un factor sobre el numero de Mach que adquiere el valor unidad para  $q_Q = 1$  y aumenta con  $q_Q$ . Por ello no se muestran resultados del modelo en función de la carga equivalente pues son básicamente equivalentes a los del número de Mach.

## 6.5. Análisis de electrodos activos.

Los electrodos intermedios se suelen utilizar para un mejor control de la zona de ionización y de aceleración en el interior del canal y consisten normalmente en una porción de pared de un material distinto al material cerámico del resto del canal. Normalmente son de grafito por tratarse de un buen emisor de electrones.

### Funcionamiento a potencial constante y conocido

En este caso, para modelar los electrodos activos se hace la hipótesis de que están en saturación continuamente lo cual es aceptable pues el flujo emitido de electrones es muy alto. Así la formulación es semejante a la utilizada para las paredes cerámicas con la salvedad de que ahora la corriente hacia la pared es no nula y el potencial en pared (punto W) es conocido de antemano.

El desarrollo matemático del modelo es similar al realizado en el apartado anterior por lo que se omite en esta ocasión. Sin embargo conviene señalar algunas diferencias en cuanto a nomenclatura:

- el criterio para el flujo positivo de electrones en la región cuasineutra cambia teniendo ahora que  $g_{eQ}$  simboliza el flujo de electrones provenientes de la pared una vez ha sido termalizado el flujo de secundarios. Así se tiene que:

$$g_{eQ} = g_{sQ} - g_{pQ}$$

- en este caso el parámetro  $\delta_w$  carece de sentido pues el flujo de secundarios no depende ahora del flujo de electrones primarios. En su lugar se utiliza el cociente  $g_{eQ}/g_{sQ}$ .
- el flujo de carga neto hacia la pared con el criterio de signos utilizado queda como:

$$j_W = j_Q = e(g_{xi+Q} + 2g_{xi++Q} + g_{eQ})$$

Los resultados de aplicar dicho modelo se muestran en la figura (6.8):

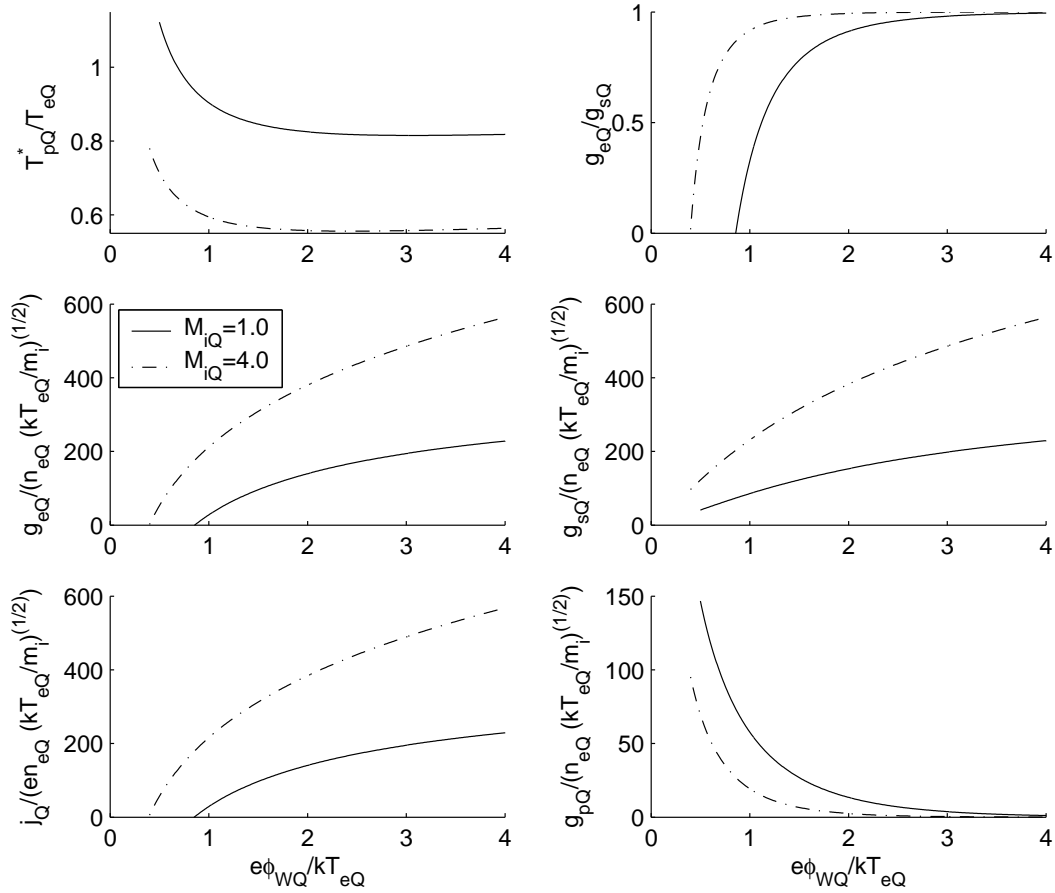


Figura 6.8: Resultados adimensionales para el modelo de electrodo activo sin iones dobles

Es interesante hacer una serie de comentarios acerca de estos resultados:

- a medida que crece el salto de potencial mayor es el flujo de carga hacia la pared como corresponde al funcionamiento deseable del electrodo. Sin embargo, para valores de  $\phi_{WQ}$  bajos el flujo de carga neto se hace negativo. Esto en principio no es deseable por lo que el punto de operación del electrodo debe elegirse a través de  $\phi_W$  de forma que funcione en la región de flujo de carga positivo.
- existe un punto para cada número de Mach donde se alcanza la condición de flujo de carga nulo que se corresponde con el caso de pared cerámica. Como era esperable para ese conjunto de puntos los resultados coinciden con los del modelo de pared cerámica.

- para caídas de potencial elevadas el flujo de primarios a la pared decrece rápidamente pues la barrera de potencial eléctrico es capaz de repeler electrones de energías cada vez mayores. Esto provoca que el cociente  $g_{xeQ}/g_{xsQ}$  tienda hacia la unidad para ese límite.

Sin embargo, este modelo presenta el problema de que predice unas corrientes de carga demasiado elevadas para los saltos de potencial que se dan en HPHall (recuérdese el hecho de que HPHall es no estacionario). Para ver esto basta tomar una serie de valores característicos para la temperatura de electrones,  $T_{eQ} \sim 10\text{eV}$ , para la densidad,  $n_{eQ} \sim 1 \cdot 10^{17}\text{m}^{-3}$ , para el salto de potencial en vaina,  $\phi_{WQ} \sim 30\text{V}$  y considerar el caso sónico y sin iones dobles. En ese caso el valor de corriente de carga predicho por el modelo es  $j_W \sim 2100\text{A}/\text{m}^2$  que para una dimensión típica de un 2mm de longitud para el electrodo y las dimensiones del SPT-100 supone una intensidad por el electrodo de 6.6A, superior a los valores normales de intensidad total por el canal. Por ello se prefiere la utilización de un modelo a intensidad constante pues permite un mayor control sobre la intensidad por el electrodo intermedio.

### **Funcionamiento a intensidad por el electrodo limitada**

En este caso se limita la intensidad de corriente que se permite introducir por el electrodo para evitar los problemas encontrados al utilizar el modelo anterior. Consiste básicamente en suponer que el electrodo está saturado continuamente al igual que en el caso anterior pero a diferencia de éste, ahora se supone que el potencial del electrodo es variable y se ajusta en función del número de Mach y la carga equivalente en la transición a vaina de forma que la corriente a través de electrodo sea una predeterminada en forma adimensional. El punto adimensional de operación se corresponde con el modelo anterior para la corriente eléctrica deseada. Este modelo permite obtener unos primeros resultados que se muestran en el siguiente capítulo, pero todavía requiere unas mejoras para permitir controlar exteriormente el potencial eléctrico del electrodo.

## Capítulo 7

# Análisis de actuaciones

### 7.1. Introducción

Una vez descritos tanto el método PIC como el método de electrones de HPHall junto con el análisis de interacción plasma-pared ha llegado el momento de presentar los resultados que se pueden obtener con el código de simulación. Se hará especial énfasis en la capacidad del código para simular motores Hall con distintos parámetros de operación con objeto de mostrar la versatilidad del mismo y las grandes de posibilidades que ofrece en tiempo de prediseño y diseño de un motor.

A continuación se describen los algoritmos utilizados para el cálculo de actuaciones para posteriormente analizar los resultados que se obtienen para un motor Hall convencional del tipo SPT-100.

Las actuaciones más importantes a calcular y que permiten describir de forma rápida el funcionamiento del motor son el empuje y la eficiencia. Asimismo, otros datos de interés son la potencia eléctrica requerida así como las pérdidas energéticas y flujos de partículas hacia las paredes. Éstos últimas provocan la erosión de las paredes y acaban determinando la vida útil, de ahí su gran importancia.

## 7.2. Cálculo de actuaciones en HPHall

En un código PIC-híbrido como el que se está manejando en este proyecto el acoplamiento entre la información aportada por los dos subcódigos es de especial importancia si se pretenden obtener resultados satisfactorios.

Una de las novedades del presente proyecto en esta materia es desarrollar una teoría que permita realizar el acoplamiento de la información de una forma rigurosa. Para ello se hace uso de la teoría presentada en el capítulo 2 y de la relación existente entre la teoría cinética y los métodos fluidos.

En este desarrollo se supondrá que el motor está fijado a un banco de ensayos y que la presión exterior en la cámara de vacío es despreciable.

### 7.2.1. Definición de empuje e impulso específico

El empuje en los motores Hall procede fundamentalmente de la interacción electromagnética entre el circuito magnético y el chorro de plasma, pero también se debe en parte a las fuerzas de presión que el gas ionizado realiza sobre las paredes del motor. Asimismo se supondrá que la interacción del circuito magnético con el chorro lejano da lugar a una contribución al empuje despreciable frente al total lo cual está justificado si tenemos en cuenta que el campo magnético decrece rápidamente al alejarse del motor.

Atendiendo a lo anterior y a las hipótesis realizadas en cada uno de los modelos de iones (simples y dobles), neutros y electrones, una definición macroscópica del empuje es:

$$\begin{aligned}
 F = & \iiint_{\Omega} (\vec{j} \times \vec{B}) \cdot \vec{k} \, d\Omega - \iint_{S_a \cup S_1 \cup S_2} \vec{n} \cdot (p_e \vec{I} + \bar{p}_{i+} + \bar{p}_{i++} + \bar{p}_n) \cdot \vec{k} \, dS + \\
 & - \iint_{S_a \cup S_1 \cup S_2} m_n n_n (\vec{u}_n \cdot \vec{n}) (\vec{u}_n \cdot \vec{k}) + m_{i+} n_{i+} (\vec{u}_{i+} \cdot \vec{n}) (\vec{u}_{i+} \cdot \vec{k}) + m_{i++} n_{i++} (\vec{u}_{i++} \cdot \vec{n}) (\vec{u}_{i++} \cdot \vec{k}) \, dS
 \end{aligned} \tag{7.1}$$

donde  $\vec{j}$  es el flujo de carga neto,  $\Omega$  representa todo el dominio físico de la simulación,  $S_a$ ,  $S_1$  y  $S_2$  representan las superficies de ánodo y superficies de la paredes interior y exterior respectivamente,  $\vec{n}$  representa la normal exterior a cualquiera de las superficies anteriores y  $\vec{k}$  un vector unitario orientado según el eje del motor y en el sentido del chorro.

Obsérvese que en la expresión (7.1) se tiene en cuenta el intercambio de cantidad de movimiento con las distintas paredes del motor por la recombinación que actúa como un término de fricción reduciendo el empuje pues iones que han sido acelerados al chocar con las paredes dan lugar a neutros de mucha menor velocidad. Por contra, el término de empuje asociado a las vainas debido al campo eléctrico no se considera por ser pequeño aunque en futuras versiones del modelo será incluido por completitud.

Si se considera la definición de tensor de flujo de cantidad de movimiento, la expresión anterior se simplifica quedando en la forma:

$$F = \iiint_{\Omega} (\vec{j} \times \vec{B}) \cdot \vec{k} d\Omega - \iint_{S_a \cup S_1 \cup S_2} \vec{n} \cdot (p_e \vec{I} + \vec{P}_{i+} + \vec{P}_{i++} + \vec{P}_n) \cdot \vec{k} dS \quad (7.2)$$

De una manera similar a como se hace con motores cohete de propulsante líquido o sólido, es posible relacionar el empuje con los flujos de cantidad de movimiento a la salida del motor. Para empezar es posible escribir ecuaciones de conservación de cantidad de movimiento para iones, neutros y electrones. En el caso de electrones esta ecuación ya fue desarrollada en el capítulo 5 quedando en la forma:

$$\vec{0} = -\nabla p_e - en_e(\vec{E} + \vec{u}_e \times \vec{B}) - n_e m_e \nu_e \vec{u}_e \quad (7.3)$$

Para los iones (simples y dobles) y los neutros, que se modelan como partículas, gracias a la relación entre la teoría cinética y la ecuaciones macroscópicas es posible utilizar una ecuación de conservación similar a (2.19) del capítulo 2 para cada una de estas especies:

$$\frac{\partial}{\partial t}(m_{i+}n_{i+}\vec{u}_{i+}) + \nabla \cdot (m_{i+}n_{i+}\vec{u}_{i+}\vec{u}_{i+}) = -\nabla \cdot \vec{p}_{i+} + en_{i+}(\vec{E} + \vec{u}_{i+} \times \vec{B}) + \vec{M}_{i+} \quad (7.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(m_{i++}n_{i++}\vec{u}_{i++}) + \nabla \cdot (m_{i++}n_{i++}\vec{u}_{i++}\vec{u}_{i++}) = -\nabla \cdot \vec{p}_{i++} + 2en_{i++}(\vec{E} + \vec{u}_{i++} \times \vec{B}) + \vec{M}_{i++} \quad (7.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(m_n n_n \vec{u}_n) + \nabla \cdot (m_n n_n \vec{u}_n \vec{u}_n) = -\nabla \cdot \vec{p}_n + \vec{M}_n \quad (7.6)$$

En HPHall las actuaciones se calculan como promedios en el tiempo por lo que a efectos de actuaciones los términos no estacionarios de las ecuaciones anteriores pueden despreciarse.

Si se suman las cuatro ecuaciones de conservación anteriores y se hace uso de la definición de tensor de flujo de cantidad de movimiento se obtiene la ecuación de conservación de cantidad de movimiento total del gas parcialmente ionizado estacionaria:

$$\nabla \cdot (\bar{\bar{P}}_n + \bar{\bar{P}}_{i+} + \bar{\bar{P}}_{i++} + p_e \bar{\bar{I}}) = \vec{j} \times \vec{B} \quad (7.7)$$

Obsérvese que los términos colisionales se cancelan unos con otros por conservación de cantidad de movimiento en las colisiones. Por otro lado, gracias a la hipótesis de cuasineutralidad la fuerza eléctrica neta sobre el gas ionizado es nula pues la influencia sobre iones y electrones se compensa. Así, la única forma de modificar la cantidad de movimiento en el sistema global es a través del campo magnético.

Si se integra la ecuación anterior a todo el volumen de cálculo y se hace uso del teorema de la divergencia y de la definición anterior de empuje instantáneo es posible obtener una expresión alternativa para el empuje de la forma:

$$F = \iint_{S_c \cup S_{inj}} \vec{n} \cdot (p_e \bar{\bar{I}} + \bar{\bar{P}}_{i+} + \bar{\bar{P}}_{i++} + \bar{\bar{P}}_n) \cdot \vec{k} dS \quad (7.8)$$

donde  $S_{inj}$  y  $S_c$  son respectivamente la superficie del inyector y la superficie de salida del dominio de simulación del chorro que viene definida por la superficie de corriente que pasa por el cátodo.

En la anterior expresión se pueden distinguir dos términos claramente:

1. el término asociado a los electrones que se reduce a la presión pues en todo el proyecto se ha despreciado la influencia de la masa de los electrones. Este término se puede calcular con facilidad utilizando las mismas técnicas que se utilizan en el modelo de electrones aunque no constituye una aportación importante al empuje total.
2. el término asociado a las partículas pesadas, iones y neutros, que se compone tanto de presión como de flujo medio de cantidad de movimiento. Desde el punto de la teoría cinética, y también del método PIC, este término constituye todo el flujo de cantidad de movimiento asociado a cada una de las partículas que dejan o entran en el dominio



de simulación por las superficies  $S_{inj}$  y  $S_c$ . Es precisamente ésta la manera de calcular dicho término, como la suma algebraica de la cantidad de movimiento según  $\vec{k}$  de las partículas que entran y salen por dichas superficies dividido por el paso temporal. Ésta es la manera correcta de hacerlo aunque una forma indirecta consiste en acudir a las distintas variables macroscópicas pesadas y la relación existente entre el tensor flujo de cantidad de movimiento y el tensor de presión.

Conviene resaltar que en las expresiones (7.2) y (7.8) los términos dominantes son el de la fuerza magnética sobre los electrones y el del flujo medio de cantidad de movimiento de iones por lo que dos primeras aproximaciones al empuje son:

$$F \sim \iiint_{\Omega} (\vec{j}_e \times \vec{B}) \cdot \vec{k} d\Omega \quad F \sim \iint_{S_c} m_i n_e (\vec{u}_i \cdot \vec{k}) (\vec{u}_i \cdot \vec{n}) dS \quad (7.9)$$

De las anteriores expresiones se deduce la dualidad existente a la hora de encuadrar los motores Hall como electrostáticos o electromagnéticos. Según la primera interpretación el empuje es debido al chorro de iones que son acelerados por el campo eléctrico mientras que según la segunda concepción el empuje es debido a la fuerza magnética realizada sobre los electrones en su movimiento hacia el ánodo.

Con todo esto se han propuesto dos métodos alternativos para el cálculo del empuje, uno basado en su definición y otro basado en el cálculo de flujos de cantidad de movimiento de partículas. Este último es el que se ha utilizado durante todo el proyecto.

Finalmente, un parámetro de especial importancia en propulsión espacial es el impulso específico definido como el cociente entre el empuje y el gasto másico del motor:

$$I_{sp} = \frac{F}{\dot{m}g_0} \quad (7.10)$$

donde  $g_0$  es la aceleración de la gravedad.

Este parámetro es de especial importancia pues mide la capacidad del motor para conseguir empuje a partir de un flujo de propulsante dado. Para los motores Hall más convencionales como SPT-100 o PPS-1350 está en el entorno de los 1600 s.

### 7.2.2. Potencia eléctrica necesaria.

Desde el punto de vista del funcionamiento del motor el consumo de potencia se distribuye entre el motor propiamente dicho y el circuito magnético del mismo. En este análisis nos centraremos básicamente en el consumo de potencia eléctrica asociado a la intensidad de descarga del motor dejando a un lado el consumo del circuito magnético.

Para un motor convencional sin electrodo intermedio una manera de evaluar la potencia eléctrica necesaria es:

$$P_d = I_d V_d \quad (7.11)$$

donde  $I_d$  y  $V_d$  son la intensidad y el potencial de descarga respectivamente. Nótese que en este caso particular de motor sin electrodo intermedio la intensidad de descarga se mantiene constante en todo el motor.

En caso de tener electrodos intermedios se puede establecer la siguiente relación:

$$P_d = \sum_j I_{d_j} (V_d - \phi_j) \quad (7.12)$$

donde el sumatorio está extendido a cada uno de los electrodos intermedios así como al cátodo siendo  $I_{d_j}$  la intensidad de descarga asociada a cada elemento y  $\phi_j$  el potencial al que se encuentra cada uno (en particular, para el cátodo es  $\phi_{cat} = 0$  pues se toma como referencia de potencial).

Toda esa potencia introducida en el sistema se emplea en acelerar los iones y en calentar el fluido electrónico aparte de las pérdidas que aparecen por ionización y radiación, flujo de energía hacia las paredes, etc.

Una segunda forma de evaluar la potencia eléctrica necesaria más consistente con el método de partículas consiste en sumar el trabajo realizado por el campo eléctrico sobre cada uno de los macro-iones y añadir el calentamiento Joule de los electrones en todo el volumen.

Además es necesario considerar la potencia asociada a las vainas que quedan fuera del dominio de cálculo del método PIC y del método de electrones. Con todo la expresión alternativa es de la forma:

$$P_d = \iiint_{\Omega} (\vec{j} \cdot \vec{E}) d\Omega + \iint_{S_a} j_B \phi_{AB} dS + \iint_{S_1 \cup S_2} j_Q \phi_{WQ} dS \quad (7.13)$$

donde el flujo de corriente eléctrica es la suma de tres contribuciones  $\vec{j} = \vec{j}_{i+} + \vec{j}_{i++} + \vec{j}_e$ . Obsérvese que en el último término, la corriente de carga es nula para las paredes cerámicas pero no para los electrodos.

Definamos ahora una serie de potencias de la siguiente forma:

- potencia eléctrica sobre electrones:

$$P_{elec,e} = \iiint_{\Omega} (\vec{j}_e \cdot \vec{E}) d\Omega$$

- potencia eléctrica sobre iones simples:

$$P_{elec,i+} = \iiint_{\Omega} (\vec{j}_{i+} \cdot \vec{E}) d\Omega$$

- potencia eléctrica sobre iones dobles:

$$P_{elec,i++} = \iiint_{\Omega} (\vec{j}_{i++} \cdot \vec{E}) d\Omega$$

- potencia eléctrica en la vaina de ánodo:

$$P_{elec,a} = \iint_{S_a} j_B \phi_{AB} dS$$

- potencia eléctrica en la vaina de electrodos:

$$P_{elec,el} = \iint_{S_1 \cup S_2} j_Q \phi_{WQ} dS$$

La potencia eléctrica sobre los iones se puede expresar de una forma adecuada para el método PIC. Para ello basta usar la definición cinética de la corriente de iones simples:

$$P_{elec,i+} = \int_{\Omega(\vec{r})} \left( \int_{\Omega(\vec{v})} (e\vec{v} \cdot \vec{E}) f_{i+}(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v} \right) d\vec{r}$$

La expresión anterior muestra que la potencia eléctrica usada en acelerar el fluido iónico se calcula como la integral a todo el dominio de cálculo y a todo el campo de velocidades del trabajo de la fuerza eléctrica sobre cada ión simple. Por tanto, para el método PIC dicha potencia puede evaluarse como:

$$P_{elec,i+} = \sum_{pi} \frac{em_{pi+}}{m_{i+}} (\vec{v}_{pi+} \cdot \vec{E}) \quad (7.14)$$

De igual forma para el término asociado a los iones dobles se tiene:

$$P_{elec,i++} = \sum_{pi} \frac{2em_{pi++}}{m_{i++}} (\vec{v}_{pi++} \cdot \vec{E}) \quad (7.15)$$

Con todo se dispone de dos métodos diferentes para evaluar la potencia eléctrica:

$$P_d = \sum_j I_{d_j} (V_d - \phi_j) = P_{elec,i+} + P_{elec,i++} + P_{elec,e} + P_{elec,a} + P_{elec,el}$$

Más adelante, en la sección de balance de energía se muestra como los resultados obtenidos con ambos métodos son iguales lo cual es una manera de comprobar que el modelo completo es correcto.

### 7.2.3. Potencia del chorro y balances de energía

La potencia del chorro  $P_{jet}$  se define como el flujo de energía cinética de las partículas, iones y neutros, que salen en el chorro del motor. En el modelo PIC y con una analogía fluida esta potencia se puede evaluar como:

$$P_{jet} = P_{jet,n} + P_{jet,i+} + P_{jet,i++} = \iint_{S_c} (\vec{e}_{i+} + \vec{e}_{i++} + \vec{e}_n) \cdot \vec{n} dS = \frac{1}{\Delta t} \sum_{p \rightarrow S_c} (1/2) m_p v_p^2 \quad (7.16)$$

donde el sumatorio está extendido a todas las partículas, iones y neutros, que atraviesan la superficie  $S_c$  en un paso temporal de partículas  $\Delta t$ . Recuérdese que  $\vec{e}_\alpha$  representa el flujo de energía total del fluido  $\alpha$  (ver capítulo 2).

Para evaluar la potencia del chorro de una forma alternativa conviene analizar los flujos de energía en todo el dominio de simulación para lo cual se va a emplear una metodología similar a la empleada en el cálculo del empuje. En primer lugar recordemos que la ecuación de la energía total de electrones obtenida en el capítulo 5 es de la forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{3}{2} n_e k T_e \right) + \nabla \cdot \left( \frac{5}{2} n_e k T_e \vec{u}_e + \vec{q}_e \right) = \vec{j}_e \cdot \vec{E} - \dot{n}_i \varphi' \epsilon_i \quad (7.17)$$

De igual forma para los iones y los neutros se tiene que la ecuación de la energía total para cada una de estas especies es (ver capítulo 2):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{3}{2} p_{i+} + \frac{1}{2} m_{i+} n_{i+} u_{i+}^2 \right) + \nabla \cdot \left( \frac{3}{2} p_{i+} \vec{u}_{i+} + \frac{1}{2} m_{i+} n_{i+} u_{i+}^2 \vec{u}_{i+} + \vec{q}_{i+} \right) = \\ & = -\nabla \cdot (\bar{\vec{p}}_{i+} \cdot \vec{u}_{i+}) + e n_{i+} \vec{u}_i \cdot \vec{E} + E_{i+} \\ & \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{3}{2} p_{i++} + \frac{1}{2} m_{i++} n_{i++} u_{i++}^2 \right) + \nabla \cdot \left( \frac{3}{2} p_{i++} \vec{u}_{i++} + \frac{1}{2} m_{i++} n_{i++} u_{i++}^2 \vec{u}_{i++} + \vec{q}_{i++} \right) = \\ & = -\nabla \cdot (\bar{\vec{p}}_{i++} \cdot \vec{u}_{i++}) + 2e n_{i++} \vec{u}_i \cdot \vec{E} + E_{i++} \\ & \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{3}{2} p_n + \frac{1}{2} m_n n_n u_n^2 \right) + \nabla \cdot \left( \frac{3}{2} p_n \vec{u}_n + \frac{1}{2} m_n n_n u_n^2 \vec{u}_n + \vec{q}_n \right) = -\nabla \cdot (\bar{\vec{p}}_n \cdot \vec{u}_n) + E_n \quad (7.18) \end{aligned}$$

Como ya se ha mencionado anteriormente HPHall trabaja con promedios temporales por lo que en las anteriores ecuaciones se puede prescindir de los términos no estacionarios y si además se utiliza la definición del vector flujo de energía total  $\vec{e}_\alpha$  queda que:

$$\nabla \cdot \left( \frac{5}{2} n_e k T_e \vec{u}_e + \vec{q}_e \right) = \vec{j}_e \cdot \vec{E} - \dot{n}_i \varphi' \epsilon_i \quad (7.19)$$

$$\nabla \cdot \vec{e}_{i+} = \vec{j}_{i+} \cdot \vec{E} + E_{i+} \quad (7.20)$$

$$\nabla \cdot \vec{e}_{i++} = \vec{j}_{i++} \cdot \vec{E} + E_{i++} \quad (7.21)$$

$$\nabla \cdot \vec{e}_n = E_n \quad (7.22)$$

La suma de las cuatro ecuaciones anteriores permite obtener la ecuación de conservación de energía total para todo el plasma:

$$\nabla \cdot \left( \vec{e}_n + \vec{e}_{i+} + \vec{e}_{i++} + \frac{5}{2} n_e k T_e \vec{u}_e + \vec{q}_e \right) = \vec{j} \cdot \vec{E} - \dot{n}_i \varphi' \epsilon_i \quad (7.23)$$

De esta expresión se deduce que la única manera de introducir energía en el sistema, aparte de flujos externos, es a través del campo eléctrico y que existe un término de pérdidas energéticas no despreciable asociado a la ionización.

Las cinco ecuaciones de conservación de energía total anteriores pueden ser integradas a todo el dominio de simulación (excluyendo las vainas) obteniéndose entonces las expresiones de los balances de energía de cada especie y del gas ionizado en su conjunto. Antes de escribir dichos balances conviene definir una serie de potencias o pérdidas:

- energía transmitida de neutros a iones simples en el proceso de ionización:

$$P_{ioniz, n \rightarrow i+} = \iiint_{\Omega} E_{i+, n \rightarrow i+} d\Omega = - \iiint_{\Omega} E_{n, n \rightarrow i+} d\Omega$$

- energía transmitida de neutros a iones dobles en el proceso de ionización:

$$P_{ioniz, n \rightarrow i++} = \iiint_{\Omega} E_{i++, n \rightarrow i++} d\Omega = - \iiint_{\Omega} E_{n, n \rightarrow i++} d\Omega$$

- energía transmitida de iones simples a iones dobles en el proceso de ionización:

$$P_{ioniz,i+\rightarrow i++} = \iiint_{\Omega} E_{i++,i+\rightarrow i++} d\Omega = - \iiint_{\Omega} E_{i+,i+\rightarrow i++} d\Omega$$

- pérdidas por ionización, excitación y radiación:

$$P_{ioniz,exc,rad} = \iiint_{\Omega} (\dot{n}_i \varphi' \epsilon_i) d\Omega$$

- flujo de energía de neutros introducido a través del inyector y flujo de energía de electrones introducido a través del cátodo:

$$P_{inj} = - \iint_{S_{inj}} (\vec{e}_n \cdot \vec{n}) dS \quad P_{cathode} = - \iint_{S_c} \left( \frac{5}{2} n_e k T_e \vec{u}_e + \vec{q}_e \right) \cdot \vec{n} dS$$

- pérdidas energéticas a las paredes laterales:

$$\begin{aligned} P_{wall,12} &= P_{wall,n,12} + P_{wall,i+,12} + P_{wall,i++,12} + P_{wall,e,12} = \\ &= \iint_{S_1 \cup S_2} (\vec{e}_n + \vec{e}_{i+} + \vec{e}_{i++} + \vec{e}_e) \Big|_W \cdot \vec{n} dS \end{aligned}$$

- pérdidas energéticas a la vaina de las paredes laterales:

$$\begin{aligned} P_{sheath,12} &= P_{sheath,n,12} + P_{sheath,i+,12} + P_{sheath,i++,12} + P_{sheath,e,12} = \\ &= \iint_{S_1 \cup S_2} (\vec{e}_n + \vec{e}_{i+} + \vec{e}_{i++} + \frac{5}{2} n_e k T_e \vec{u}_e + \vec{q}_e) \Big|_Q \cdot \vec{n} dS \end{aligned}$$

- pérdidas energéticas a las paredes metálicas del ánodo:

$$\begin{aligned} P_{wall,a} &= P_{wall,n,a} + P_{wall,i+,a} + P_{wall,i++,a} + P_{wall,e,a} = \\ &= \iint_{S_a} (\vec{e}_n + \vec{e}_{i+} + \vec{e}_{i++} + \vec{e}_e) \Big|_A \cdot \vec{n} dS \end{aligned}$$

- pérdidas energéticas a la vaina de ánodo:

$$P_{sheath,a} = P_{sheath,n,a} + P_{sheath,i+,a} + P_{sheath,i++,a} + P_{sheath,e,a} =$$

$$= \iint_{S_a} (\vec{e}_n + \vec{e}_{i+} + \vec{e}_{i++} + \frac{5}{2} n_e k T_e \vec{u}_e + \vec{q}_e) \Big|_B \cdot \vec{n} dS$$

Obsérvese que en las vainas debe haber conservación de energía y por tanto se han de verificar las siguientes relaciones:

$$P_{sheath,12} + P_{elec,el} = P_{wall,12}$$

$$P_{sheath,a} + P_{elec,a} = P_{wall,a}$$

También es destacable que los flujos de energía asociados a neutros e iones en cada caso deben calcularse de forma similar a la propuesta en la ecuación (7.16), es decir, evaluando la energía de las partículas que salen por la correspondiente superficie. De esta forma se asegura la conservación de energía al pasar del método PIC a la descripción fluida.

Una vez definidas todas estas variables, los balances de potencia para cada especie individualmente y para todo el conjunto quedan en la forma:

- balance de energía de neutros:

$$P_{inj} = P_{jet,n} + P_{sheath,n,12} + P_{sheath,n,a} + P_{ioniz,n \rightarrow i+} + P_{ioniz,n \rightarrow i++} \quad (7.24)$$

- balance de energía de iones simples:

$$P_{elec,i+} + P_{ioniz,n \rightarrow i+} = P_{jet,i+} + P_{sheath,i+,12} + P_{sheath,i+,a} + P_{ioniz,i+ \rightarrow i++} \quad (7.25)$$

- balance de energía de iones dobles:

$$P_{elec,i++} + P_{ioniz,n \rightarrow i++} + P_{ioniz,i+ \rightarrow i++} = P_{jet,i++} + P_{sheath,i++,12} + P_{sheath,i++,a} \quad (7.26)$$



- balance de energía de electrones:

$$P_{elec,e} + P_{cathode} = P_{ioniz,exc,rad} + P_{sheath,e,12} + P_{sheath,e,a} \quad (7.27)$$

- balance de energía global (incluyendo vainas):

$$P_d + P_{cathode} + P_{inj} = P_{jet} + P_{wall,12} + P_{wall,a} + P_{ioniz,exc,rad} \quad (7.28)$$

En base a la anterior ecuación se puede definir una potencia total de pérdidas  $P_{loss}$  como:

$$P_{loss} = P_{wall,12} + P_{wall,a} + P_{ioniz,exc,rad} \quad (7.29)$$

Con ello se tiene que la manera alternativa de evaluar la potencia del chorro es:

$$P_{jet} = P_d + P_{cathode} + P_{inj} - P_{loss} \quad (7.30)$$

El significado físico de la anterior expresión es simple: toda la energía introducida en el sistema a través del cátodo y del inyector junto con la potencia eléctrica se invierte en potencia del chorro y pérdidas hacia las paredes o por radiación y excitación.

#### 7.2.4. Eficiencia total y eficiencias parciales

Una vez realizados los balances de energía se pueden definir las eficiencias total y parciales de una forma sencilla. A continuación se definen las eficiencias más usuales a la hora de describir el funcionamiento del motor de efecto Hall pero antes de hacerlo conviene señalar dos aspectos:

1. en el apartado anterior se ha hecho un análisis de la potencia eléctrica necesaria para el funcionamiento del motor,  $P_d$ . Sin embargo, para el funcionamiento del sistema completo es necesario tener en cuenta la potencia asociada al circuito magnético,  $P_{mag}$ . Con todo se tiene que:

$$P_{tot} = P_d + P_{mag}$$

2. por otro lado, para el funcionamiento del cátodo es necesario sangrar parte del propulsante de forma que el consumo total,  $\dot{m}$  es superior al flujo en el ánodo,  $\dot{m}_a$ . Normalmente, el gasto másico en el cátodo,  $\dot{m}_c$ , suele ser entre un 5 % y 10 % del total. Así es:

$$\dot{m} = \dot{m}_a + \dot{m}_c$$

La eficiencia total en empuje de un motor Hall, tal y como se define en la literatura sobre propulsión eléctrica, se puede escribir como:

$$\eta = \frac{F^2}{2\dot{m}P_{tot}} \quad (7.31)$$

Asimismo, se suelen definir unas eficiencias que caracterizan el funcionamiento del circuito magnético y del cátodo como:

- eficiencia del circuito magnético:

$$\eta_{mag} = \frac{P_d}{P_{tot}} = 1 - \frac{P_{mag}}{P_{tot}}$$

- eficiencia del cátodo:

$$\eta_c = \frac{\dot{m}_a}{\dot{m}} = 1 - \frac{\dot{m}_c}{\dot{m}}$$

Normalmente se suele distinguir entre el funcionamiento del motor propiamente dicho y el resto de sistemas auxiliares y circuito magnético. Para ello se define la llamada eficiencia de ánodo como:

$$\eta_a = \frac{F^2}{2\dot{m}_a P_d} \quad (7.32)$$

La relación entre las eficiencias anteriores es de la forma:

$$\eta = \eta_a \eta_{mag} \eta_c$$

En este proyecto en todo momento se trabaja con la eficiencia de ánodo pues no se pretende modelar el funcionamiento del circuito magnético ni del cátodo.

También es posible obtener una eficiencia interna o eficiencia motor que representa la capacidad del motor para transformar la energía eléctrica en energía cinética del chorro. Así se puede poner como:

$$\eta_{int} = \frac{P_{jet}}{P_d} \quad (7.33)$$

En textos de propulsión espacial como [56] se suele realizar un análisis aproximado según el cual  $F^2/(2\dot{m}_a) = P_{jet}$ , es decir, la potencia del chorro es la única causante del empuje y como consecuencia de ello la eficiencia de ánodo y la eficiencia interna son equivalentes. Sin embargo en este proyecto se ha mostrado que esto no es del todo correcto pues existen otros términos a considerar en la definición del empuje. Por tanto es necesario distinguir entre esas dos eficiencias aunque la de mayor interés es la primera de ellas.

Los distintos procesos que intervienen en el establecimiento de la eficiencia de ánodo son básicamente: proceso de ionización, proceso de aceleración, apertura del chorro en el vacío,... Por ello conviene definir una serie de eficiencias parciales que permiten caracterizar cada uno de estos procesos. En este proyecto se introducen los efectos de los iones dobles y de electrodo intermedios como novedad con respecto al modelo anterior.

Así se tienen:

- eficiencia de utilización del propulsante: permite caracterizar el proceso de ionización pues es el cociente entre el flujo másico de iones (simples y dobles) a través de la superficie  $S_c$ ,  $\dot{m}_{i,c}$  y el flujo másico de gas introducido en el canal,  $\dot{m}_a$ :

$$\eta_u = \frac{\dot{m}_{i,c}}{\dot{m}_a} \quad (7.34)$$

- eficiencia de utilización de corriente: caracteriza el flujo de electrones a través del cátodo y de electrodo intermedios necesario para mantener el funcionamiento del motor pues es el cociente entre el flujo de carga iónica multiplicado por el potencial total de descarga y la potencia de descarga (incluyendo la asociada a los electrodos intermedios). Por tanto, en cierta forma también caracteriza el proceso de ionización:

$$\eta_{cur} = \frac{I_{di,c} V_d}{P_d} \quad (7.35)$$

- eficiencia en la utilización de la carga: pretende reproducir la ineficiencia asociada a la existencia de un chorro con dos especies, iones simples e iones dobles, de velocidades muy diferentes:

$$\eta_q = \frac{(I_{di+,c} + I_{di++,c}/\sqrt{2})^2}{(I_{di+,c} + I_{di++,c})(I_{di+,c} + I_{di++,c}/2)} \quad (7.36)$$

- eficiencia en la utilización del potencial para iones simples: se define como el cociente entre el flujo de energía total de los iones simples que llegan a la superficie  $S_c$ ,  $P_{jet,i+}$ , y el valor máximo de dicho flujo de energía,  $I_{di+,c} V_d$ . Por tanto caracteriza el proceso de aceleración del chorro de iones simples:

$$\eta_{vol,i+} = \frac{P_{jet,i+}}{I_{di+,c} V_d} \quad (7.37)$$

- eficiencia del chorro o la pluma para iones simples: tiene en cuenta la pérdida de empuje axial debido a la divergencia del chorro que en motores Hall puede alcanzar valores de 40° de semiángulo. Se define como:

$$\eta_{p,i+} = \frac{F_{i+}^2 / 2\dot{m}_{i+,c}}{P_{jet,i+}} \quad (7.38)$$

donde  $F_{i+}$  es el término de empuje debido a los iones simples.

Por otro lado conviene definir otro parámetro de empuje debido a neutros y electrones como:

$$K_1 = \frac{F^2 / 2\dot{m}_a}{F_i^2 / 2\dot{m}_{i,c}} \quad (7.39)$$

donde  $F_i$  es el término de empuje debido a los iones simples y dobles.

Además se puede definir una pseudo-eficiencia de carga como:

$$\eta'_q = \frac{F_i^2 / 2\dot{m}_{i,c} I_{di,c}}{F_{i+}^2 / 2\dot{m}_{i+,c} I_{di+,c}} \quad (7.40)$$

Esta pseudo-eficiencia se reduce a la eficiencia de carga bajo la hipótesis que de los iones dobles lleven una velocidad  $\sqrt{2}$  superior a la de los iones simples en la superficie del cátodo.

Por tanto:

$$\eta'_q = K_2 \eta_q \quad \text{con} \quad K_2 \sim 1$$

A la vista de las definiciones es posible derivar una relación interesante entre todas las eficiencias:

$$\eta_a = K_1 K_2 \eta_u \eta_{cur} \eta_q \eta_{vol,i+} \eta_{p,i+}$$

donde se pone de manifiesto que la eficiencia de ánodo depende básicamente de los procesos de ionización y aceleración, así como de la presencia de iones dobles o neutros en el chorro exterior y de la divergencia del mismo.

### 7.3. Chequeo de balances de masa y energía

En este apartado se presentan resultados del código de simulación HPHall que muestran cómo los balances de masa y energía se verifican para las variables promediadas a lo largo del tiempo. Esta es una manera de comprobar que la implementación del modelo es correcta.

Para este estudio se simulará un motor SPT-70 despreciando iones dobles y con un campo magnético no optimizado. Las características más importantes de este motor son:

- única etapa de potencial de descarga: 300 V
- propulsante: Xenón
- longitud del canal: 30 mm
- gasto másico: 2.34 mg/s

En cuanto al balance de masa en la figura (7.1) se puede observar el flujo másico de iones, neutros y total promediado en el tiempo. En dicha figura se observa que el flujo de masa total se mantiene aproximadamente constante con una diferencia entre el flujo de entrada y salida inferior al 1.0%. Así pues el balance de masa queda comprobado.

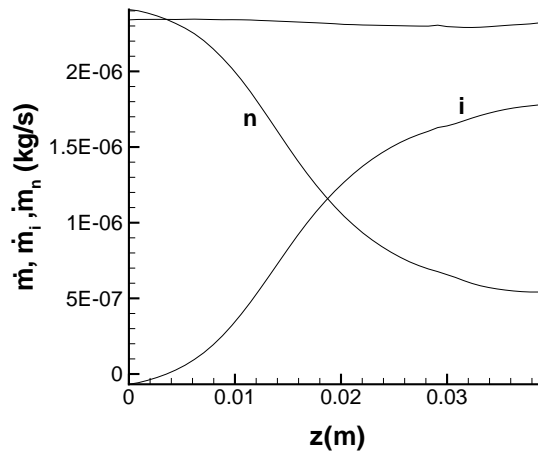


Figura 7.1: Flujo másico de iones, neutros y total a lo largo del canal.

En lo que se refiere al balance de energías a continuación se presentan los valores promedio de los distintos términos energéticos definidos en la sección anterior. Se analizará cada uno de los balances individualmente para finalmente presentar el balance global.

- balance de energía de iones simples :  $P_{elec,i+} + P_{ioniz,n \rightarrow i+} = P_{jet,i+} + P_{sheath,i+,12} + P_{sheath,i+,a} + P_{ioniz,i+ \rightarrow i++}$

$P_{elec,i+}$	$P_{ioniz,n \rightarrow i+}$	$P_{jet,i+}$	$P_{sheath,i+,12}$	$P_{sheath,i+,a}$	$P_{ioniz,i+ \rightarrow i++}$	<i>Error</i>
325.1 W	1.7 W	302.3 W	27.8 W	0.9 W	0 W	4.2 W

- balance de energía de neutros :  $P_{inj} = P_{jet,n} + P_{sheath,n,12} + P_{sheath,n,a} + P_{ioniz}$

$P_{inj}$	$P_{jet,n}$	$P_{ioniz,n \rightarrow i+}$	$P_{ioniz,n \rightarrow i++}$	$P_{sheath,n,12}$	$P_{sheath,n,a}$	<i>Error</i>
0.2 W	3.1 W	1.7 W	0 W	-5.7 W	1.4 W	0.2 W

- balance de energía de electrones :  $P_{elec,e} + P_{cathode} = P_{ioniz,exc,rad} + P_{sheath,e,12} + P_{sheath,e,a}$

$P_{elec,e}$	$P_{cathode}$	$P_{ioniz,exc,rad}$	$P_{sheath,e,12}$	$P_{sheath,e,a}$	<i>Error</i>
346.9 W	5.1 W	69.2 W	249.6 W	32.9 W	0.3 W

- balance de energía global :  $P_d + P_{cathode} + P_{inj} = P_{jet} + P_{wall,12} + P_{wall,a} + P_{ioniz,exc,rad}$

$P_d$	$P_{cathode}$	$P_{inj}$	$P_{jet}$	$P_{wall,12}$	$P_{wall,a}$	$P_{ioniz,exc,rad}$	<i>Error</i>
642.2 W	5.1 W	0.2 W	305.4 W	272.7 W	4.8 W	69.2 W	4.6 W

- balance de la energía eléctrica :  $P_d = P_{elec,i+} + P_{elec,e} + P_{elec,a} + P_{elec,el} = I_d V_d$

$P_d = I_d V_d$	641.4 W
$P_d = P_{elec,i+} + P_{elec,e} + P_{elec,a}$	642.2 W
<i>Error</i>	0.8 W

Nótese que en el balance de potencia eléctrica no es necesario introducir el término de iones dobles pues no han sido modelados en este caso, ni tampoco es necesario introducir potencias asociadas a electrodos intermedios.

Se pueden realizar algunos comentarios sobre los resultados anteriores:

- el error cometido en el balance de energía global es inferior al 1 % con respecto a la potencia eléctrica lo cual es muy aceptable si tenemos en cuenta que la mayor parte de ese error procede de los iones que son modelados mediante un método de partículas.
- para los electrones y los neutros el error cometido es muy pequeño comparado con las potencias manejadas mientras que para los iones dicho error es un tanto mayor.
- la evaluación de la potencia eléctrica mediante ambos métodos da resultados muy parecidos; en particular, la diferencia es inferior a 1 W.
- un resultado interesante de los balances de energía es que en términos relativos, los errores cometidos en las especies descritas por el método PIC, iones y neutros, es bastante mayor que para los electrones. Por tanto, una posible mejora al presente código sería aumentar la precisión del método PIC, bien utilizando integradores de la trayectoria de mayor precisión o bien utilizando algoritmos de pesado de orden mayor. En cualquier caso cualquiera de estas dos modificaciones suponen importantes cambio en el código y se dejan para más adelante.

Aparte de estos balances, se pueden realizar otros como el de energía extraída de los neutros e introducida en los iones en la ionización o el de la vainas. En todos ellos se obtienen resultados tan buenos como los obtenidos para los electrones.

Nótese que los resultados mostrados en esta sección han sido obtenidos sin aplicar la técnica de forzado de la condición de Bohm presentada en el capítulo 4 pues dicha técnica tiende a provocar errores ligeramente mayores al ser muy intrusiva para las partículas.



## 7.4. Resultados para motor convencional SPT-100

Durante el presente proyecto se han realizado una serie de análisis sobre el motor SPT-100. Sus características principales obtenidas en ensayos en laboratorio son:

$V_d$	$B_{max}$	$P_d$	$\eta$	$\dot{m}$	$F$	$I_{sp}$	$R_1$	$R_2$	$L_{ch}$
300 V	230 G	1350 W	0.48	4.8 mg/s	83 mN	1600 s	35 mm	50 mm	25 mm

Cuadro 7.1: Valores característicos del motor SPT-100.

A continuación se presentan una serie de resultados obtenidos con el código de simulación HPHall-2 para el motor SPT-100 para 300V y sin iones dobles. El objetivo es mostrar la potencia del código a la hora de caracterizar los distintos fenómenos que ocurren en el interior del motor. En primer lugar se dan una serie de parámetros para a continuación mostrar mapas bidimensionales que permitirán realizar una explicación sobre la física del funcionamiento de los motores Hall y de los resultados dados por el código. En una segunda parte, se muestran una serie de perfiles unidimensionales de interés. Dado que HPHall es un modelo no estacionario, todos resultados anteriores son promedios temporales para un intervalo de tiempo suficientemente grande como para caracterizar correctamente la operación del motor.

En la figura (7.2) se presenta el campo magnético utilizado en la simulación para el caso de 300V.

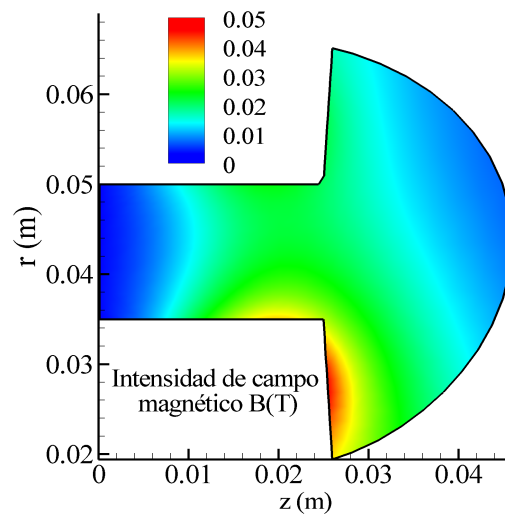


Figura 7.2: Intensidad de campo magnético utilizado para la simulación del motor SPT-100

#### 7.4.1. Resumen de parámetros de funcionamiento según HPHall

De los análisis paramétricos realizados en [57] con el presente código salvo que sin iones dobles se ha derivado una conclusión importante: el valor adecuado del parámetro de difusión anómala es  $\alpha_{ano} = 6,25 \cdot 10^{-3}$ . Esto se basa en que el valor resultante del parámetro de Hall efectivo en la mayor parte del canal es  $\beta_e = 160$ , un valor semejante al hallado experimentalmente por Hofer en [7]. En dicha referencia se justifica que la operación eficiente de los motores Hall solo se alcanza en un rango de valores de parámetro de Hall reducido. Por tanto, en este proyecto se sigue una filosofía semejante.

Los valores obtenidos para el motor SPT-100 para un potencial de descarga nominal de 300V se presentan en la siguiente tabla:

$P_d$	$\eta_a$	$F$	$I_{sp}$
1007 W	0.38	61 mN	1289 s

Cuadro 7.2: Valores obtenidos con HPHall para el motor SPT-100.

Obsérvese que estos resultados han sido obtenidos para un caso sin iones dobles y como se verá más adelante el considerarlos en la simulación aumenta la eficiencia de ánodo.

A la vista de los resultados se observan unas diferencias importantes entre los resultados experimentales y los obtenidos con HPHall. La causa fundamental que se encuentra para ello es que las pérdidas a la pared son excesivas. Las razones para ello pueden ser varias entre las cuales se destacan:

- flujo a la pared de iones excesivo debido a la utilización del forzado de Bohm, técnica muy intrusiva para el modelo de partículas. Recientemente, una nueva técnica ha surgido consistente en el cálculo de propiedades en las paredes mediante pesado superficial. Los resultados obtenidos son buenos y tiene la propiedad de no ser una técnica intrusiva para el método de partículas. Sin embargo, por falta de tiempo no ha sido posible implementarla pero queda como mejora pendiente en el código.

- excesivo error cometido al aceptar la ley de Maxwell-Boltzmann como válida o suponer una temperatura constante a lo largo de las líneas de campo.
- excesivo error cometido al suponer un modelo fluido de electrones con una sola temperatura. En realidad la presencia de un fuerte campo magnético induce en los electrones una anisotropía de forma que es necesario distinguir entre la temperatura según una dirección paralela al campo magnético y la temperatura según la dirección perpendicular.

En [58] se propone un modelo estacionario unidimensional que tiene en cuenta dicho efecto obteniéndose como resultado que para potenciales de 300V la temperatura según la dirección paralela al campo magnético es del orden de la mitad que la temperatura según la perpendicular. Esto es de especial importancia pues no solo la temperatura en pared sería menor sino que el flujo de iones decrece. Ello es debido a que en la ley de Maxwell-Boltzmann la temperatura que aparecería sería la correspondiente a la dirección paralela al campo magnético y con ello la caída de potencial desde el centro del canal a la pared sería menor.

Otros códigos de simulación para resolver este problema utilizan un modelo de pérdidas basado en resultados experimentales lo cual tiene el problema de que no permite entender la física detrás del proceso. Además requieren obtener resultados experimentales para un motor que probablemente no puedan ser extrapolados a otros motores con características de funcionamiento diferentes.

En cualquier caso, esta deficiencia del código a priori no debe considerarse como un grave problema del mismo. Lo que se pretende en el actual proyecto es reproducir las principales tendencias a la hora de variar los distintos parámetros de operación. Para una etapa posterior del desarrollo del código se deja el intentar obtener resultados más parecidos a los resultados experimentales. En particular, con la metodología presentada en el proyecto a la hora de modelar el fluido electrónico la extensión a un modelo de dos temperaturas de electrones puede realizarse fácilmente.

### 7.4.2. Mapas bidimensionales

En las figuras 7.3 y 7.4 se muestran los resultados bidimensionales más importantes obtenidos. A continuación se comentarán las gráficas explicando alguno de sus características más importantes y relacionándolas de manera cualitativa con la física de los distintos procesos.

- Densidad de electrones ( $n_e$ ).- Se puede observar como la densidad es mayor en la zona de ionización y que decrece en las proximidades de las paredes debido a la recombinación de iones que tiene lugar en ellas.
- Densidad de neutros ( $n_n$ ).- Se observa que cerca del inyector la densidad es mucho más alta, y según se avanza por el canal, va disminuyendo debido a la ionización. Como era de esperar para una sección de coordenada axial constante y cercana a la salida del motor la densidad de neutros sea superior en las paredes que en la zona central del canal debido a la recombinación de iones en las paredes.

Por otro lado, comparando con la densidad de iones se puede observar que hay una diferencia de dos órdenes de magnitud que en su momento permitió justificar el usar macro-partículas de masas tan distintas para macro-iones y macro-neutros.

- Temperatura de electrones ( $T_e$ ).- Se observa un fuerte calentamiento a la salida del canal debido fundamentalmente al efecto Joule producido en los electrones por el campo eléctrico. Tras esto, según avanzan hacia el ánodo, sufren colisiones con los neutros para ionizarlos y por tanto pierden energía, produciéndose así un enfriamiento de los mismos. Este descenso de temperatura se debe también a las pérdidas energéticas hacia las paredes que son el término dominante en este caso.
- Tasa de ionización ( $\dot{n}_e$ ).- La tasa de ionización es una variable que es directamente proporcional a las dos densidades descritas anteriormente y tiene una fuerte dependencia con la temperatura  $T_e$ . La región de ionización se encuentra localizada justo después del inyector y antes de la zona de aceleración a tenor de la gráfica del potencial eléctrico. Esto demuestra que el punto de operación es adecuado. En otros regímenes la zona de aceleración y de ionización se mezclan provocando un descenso en la eficiencia.

- Potencial Eléctrico ( $\phi$ ).- El efecto más importante a considerar en esta figura es la forma que tiene la caída de potencial. Como puede observarse, para que se cumpla la ecuación de Boltzmann, las líneas equipotenciales están más curvadas que las de campo magnético debido a la variación de densidad a lo largo de las mismas.
- Corriente de axial de iones ( $j_{iz}$ ).- Esta gráfica permite ver el flujo de iones que salen del canal causantes de la mayor parte del empuje. Es interesante observar la región de flujo reverso de iones en la región cercana al ánodo y que aparece como consecuencia de la caída de potencial existente desde la zona de ionización hasta el ánodo.
- Temperatura de iones ( $T_i$ ).- Se observa un calentamiento de los iones desde la región de ionización hasta el exterior del canal según son acelerados por el campo eléctrico.

Es interesante observar cómo la temperatura de iones es bastante inferior a la temperatura electrónica en la mayor parte del canal, salvo a la salida del mismo y en el chorro exterior. Esto es un resultado importante pues muchos de los códigos fluidos existentes en la actualidad para motores Hall suelen suponer que la temperatura de iones es despreciable frente a la de electrones. A la vista de estos resultados esta hipótesis queda en entredicho. De cualquier forma este hecho se produce en el chorro exterior no afectando en principio a los fenómenos que ocurren en el interior del canal.

- Temperatura de neutros ( $T_n$ ).- Al igual que los iones, los neutros experimentan un calentamiento, pero por motivos bien distintos. En este caso es la recombinación en pared de iones de alta energía la que produce neutros rápidos y muy energéticos. Según el apartado (4.7.5), la temperatura de emisión de los neutros recombinados depende de la temperatura de impacto, que incluye términos cinéticos, por lo que los neutros emitidos en las paredes de la región de aceleración, donde los iones son de alta energía, deben volver al canal con una energía elevada y con mayor dispersión y temperatura.

- Corriente de iones ( $\vec{j}_i$ ).- Es posible observar mediante el campo vectorial la componente radial del flujo iones. En la zona del final del canal el flujo de iones que impactan con la pared es importante y será el principal agente de erosión de las paredes cerámicas.
- Velocidad de neutros ( $\vec{v}_n$ ).- Como se ha comentado antes, se pueden observar las velocidades extraordinariamente altas con las que son emitidos los neutros en las paredes verticales del motor. Ello es debido a que los iones que impactan allí han sido acelerados hasta grandes velocidades.
- Parámetro de Hall ( $\beta_e$ ) y frecuencia efectiva de colisiones ( $\nu_e$ ).- Son parámetros pertenecientes al código de electrones y desde un punto de vista de revisión de hipótesis, se puede observar como el parámetro de Hall se mantiene en un valor muy alto en casi todo el dominio al igual que la frecuencia colisional, como se señaló en el capítulo 5. En particular el valor alcanzado en la mayor parte del dominio es  $\beta_e=160$  que como ya se ha señalado es el valor obtenido experimentalmente por Hofer en [7].

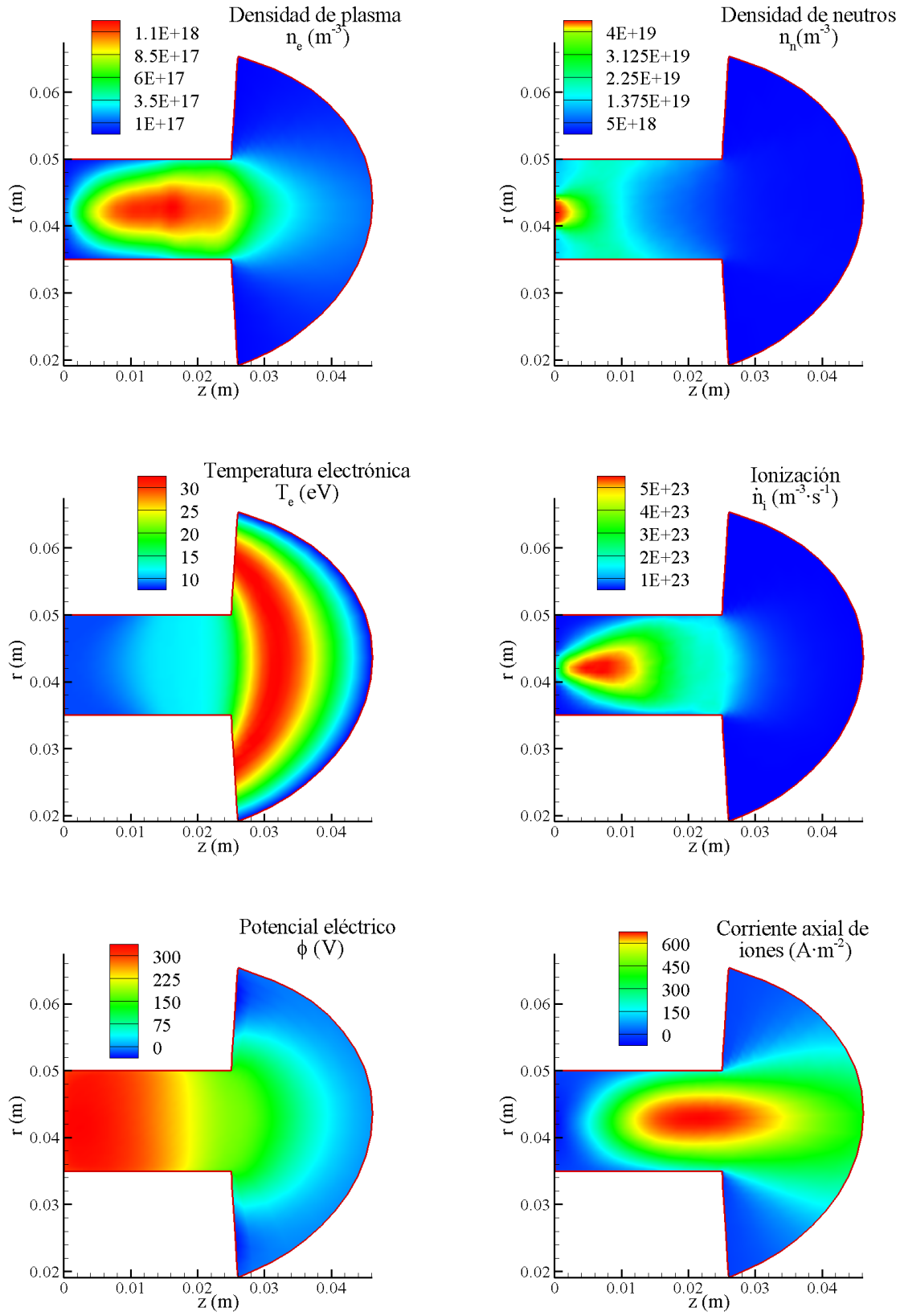


Figura 7.3: Mapas bidimensionales.

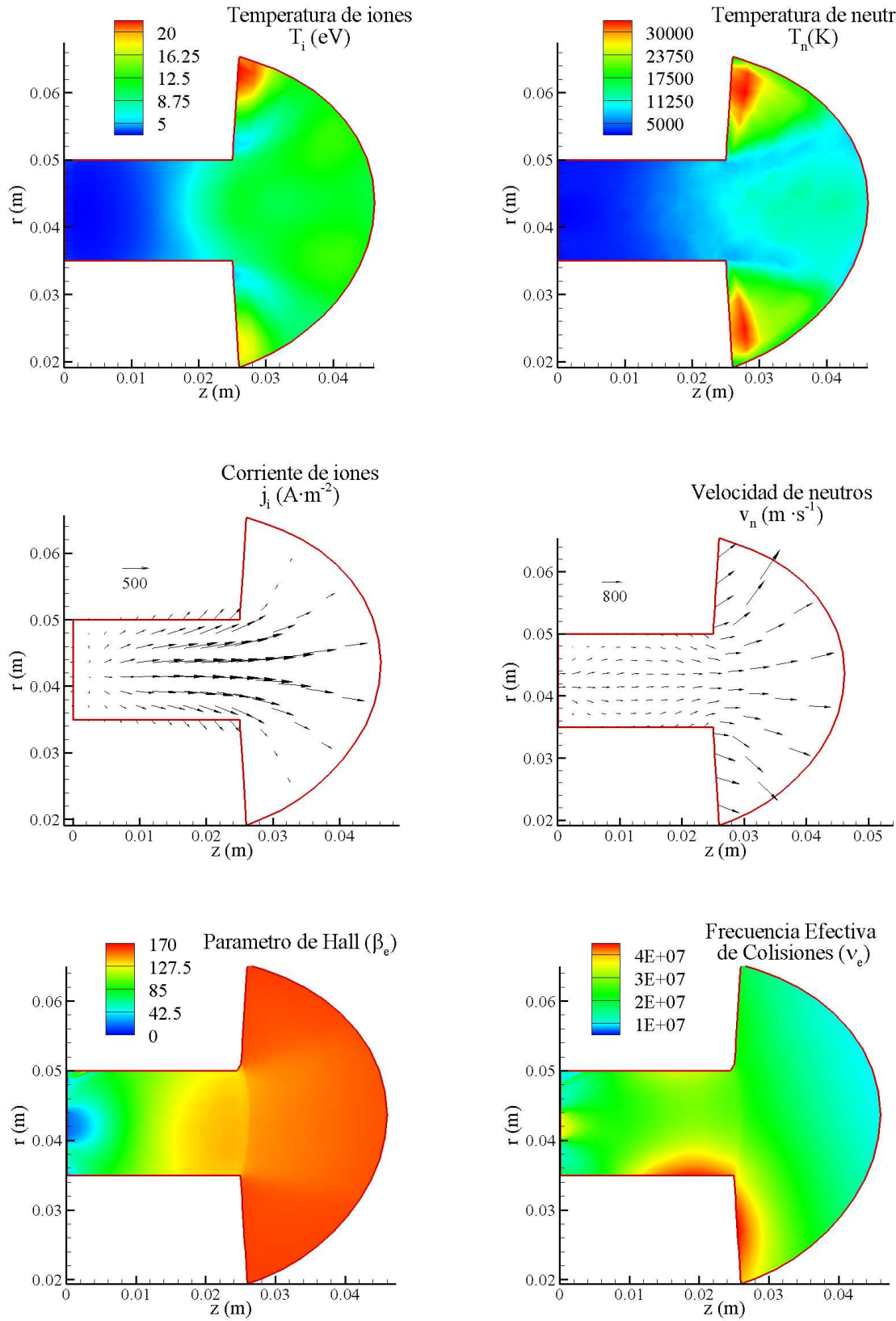


Figura 7.4: Mapas bidimensionales.



### 7.4.3. Resultados unidimensionales

Las gráficas bidimensionales no proporcionan una información cuantitativa precisa y puede ser interesante conocerla con mayor exactitud en determinadas zonas del dominio. Por ello en las paredes y en secciones de radio constante o coordenada axial constante, se obtienen también gráficas con resultados cuantitativos más fáciles de comparar. A continuación se muestran algunos de estos resultados.

#### Resultados en la pared.

- Densidades de electrones y neutros ( $n_e, n_n$ ).- Pueden resultar interesantes a la hora de comprobar detalles como la longitud de Debye en las paredes para confirmar que el dominio puede seguir considerándose cuasineutro (sobre todo en las paredes verticales externas del motor). En [35] se utiliza un código PIC completo, incluidos electrones, y los resultados parecen mostrar que no se alcanza la cuasineutralidad en dichas paredes verticales externas. Sin embargo, nuestro modelo predice lo contrario y experimentalmente no se tienen resultados que permitan determinar qué es lo cierto.
- Número de mach de iones en la pared ( $M_i$ ).- Se puede observar en la gráfica que se cumple la condición de Bohm ya que la velocidad de iones es claramente supersónica ( $M_i > 1$ ) en todo el canal. Como es lógico esto debe ocurrir, ya que para ello se ha activado el forzado de la condición de Bohm durante estos cálculos.
- Temperatura de iones y electrones ( $T_i, T_e$ ).- Se observa que la temperatura de iones no es despreciable frente a la de electrones y va creciendo en la dirección del chorro. Esto obliga a replantearse el problema de la condición de Bohm pues el tratamiento actual desprecia la temperatura de iones. Actualmente, se pretende desarrollar un modelo de condición de Bohm en su versión cinética que permita tener en cuenta dicho efecto.
- Flujos totales de energía a la pared ( $q_W^{tot}$ ).- Incluyen términos cinéticos con lo que será una de las variables fundamentales para el futuro estudio del sputtering o de la carga térmica hacia las paredes para el diseño del subsistema térmico del motor.

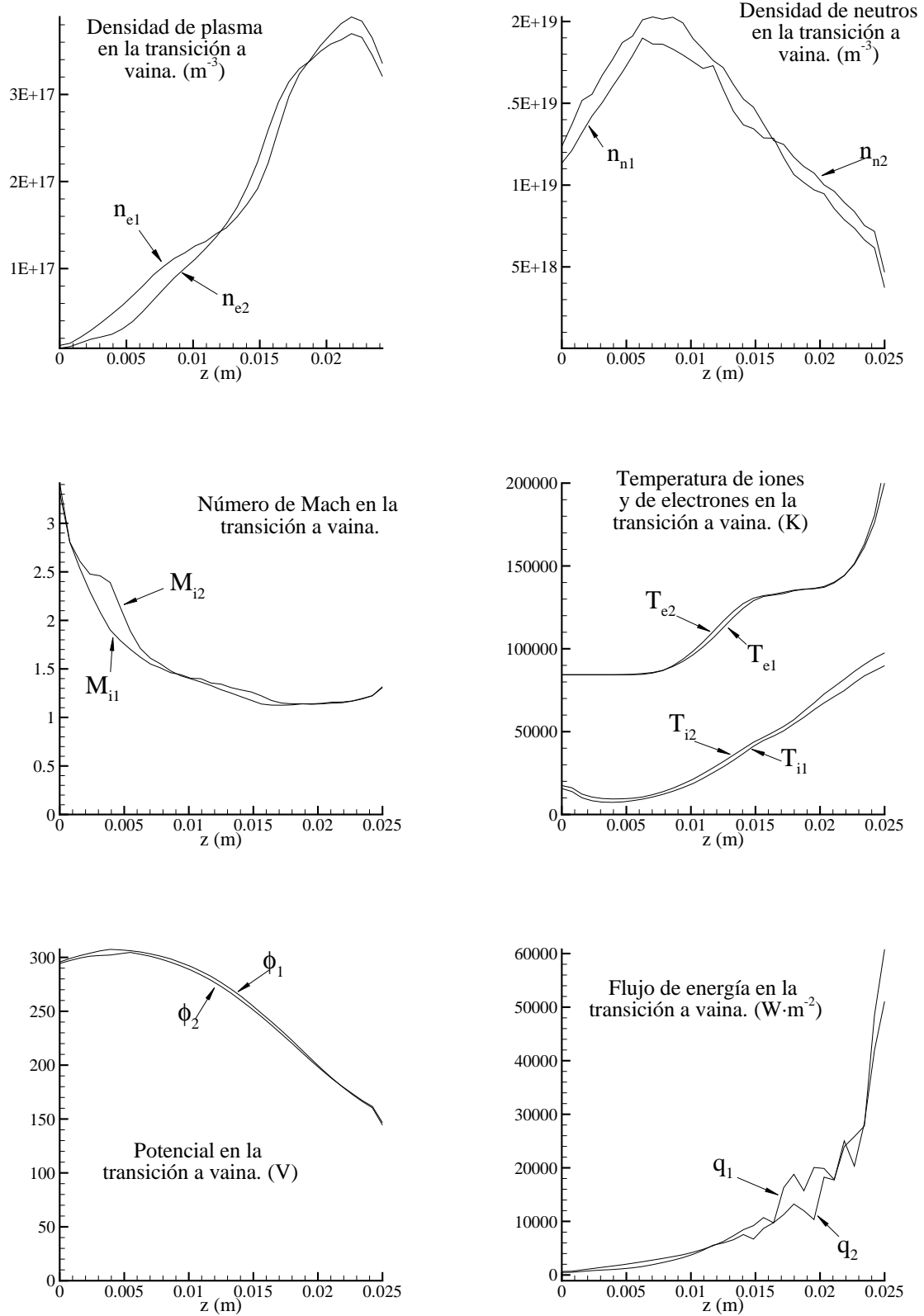


Figura 7.5: Resultados sobre las paredes en el interior del canal, el subíndice 1 indica pared interior y el subíndice 2 pared exterior.

**Resultados en líneas de  $r$  constante y  $z$  constante**

Los comentarios más interesantes sobre estas gráficas se dan a continuación:

- Densidades de plasma y neutros ( $n_e$ ,  $n_n$ ).- En la gráfica axial ( $r = cte.$ ) se puede observar el perfil de densidades en la zona central y distinguir claramente las zonas donde se produce la ionización y la expansión del gas ionizado en el chorro exterior.
- Temperatura electrones ( $T_e$ ).- Al igual que se comentó en el gráfico bidimensional de temperaturas siguiendo el recorrido de los electrones desde el cátodo al ánodo, se produce una fuerte subida inicial de temperatura, debido al calentamiento Joule de los electrones al atravesar la caída del potencial eléctrico. En esta gráfica se observa incluso como la temperatura de iones llega a superar a la de electrones.
- Potencial eléctrico( $\phi$ ).- En la gráfica axial queda mejor definida la forma del potencial existente de ánodo a cátodo que en el mapa bidimensional. Ésta caída de potencial será la que acelere los iones y proporcionará el impulso necesario para la propulsión. Fijándose en la zona próxima al ánodo, se observa un cambio de pendiente en el potencial que produce el conocido flujo reverso de iones hacia el ánodo. Por otro lado en la gráfica radial, se observa la caída de potencial que obliga a los iones a dirigirse contra la pared, téngase en cuenta las escalas de cada línea. Se puede hacer una fácil comparación entre la caída de potencial junto con las densidades en cada sección y el flujo de iones hacia las paredes del mapa bidimensional.

A partir de los resultados mostrados para las secciones de coordenada axial constante es posible analizar los efectos cilíndricos. En principio, este efecto se manifiesta en que las gráficas no son simétricas respecto del punto central. En particular, dicha influencia es muy notable en la sección a  $z=0.015\text{m}$  lo cual puede deberse a la influencia del inyector.

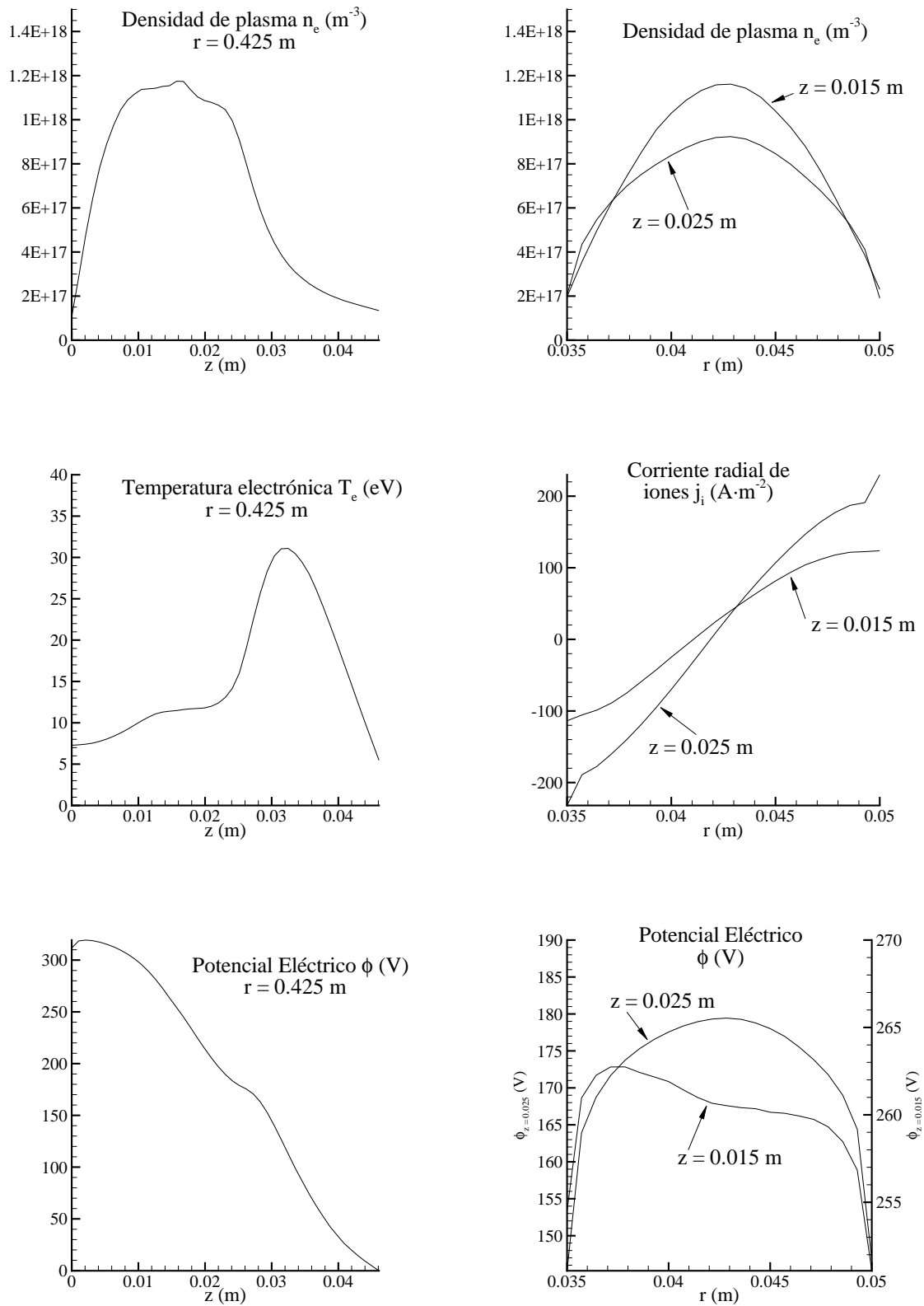


Figura 7.6: Resultados en sección  $r=0.0425$  m y dos secciones  $z=0.015$  m y  $z=0.025$  m.

## 7.5. Soluciones estacionarias. Estudio de oscilaciones.

Otra de las posibilidades que ofrece HPHall es el análisis de oscilaciones temporales pues se trata de un código no estacionario. En esta sección se presenta un breve análisis de las características de las oscilaciones presentes en los resultados del código. Por simplicidad se analiza el motor tipo SPT-100 a 300V. Estas oscilaciones se intentan relacionar con las observadas en los motores Hall de forma experimental.

En la figura (7.7) se presentan las variaciones temporales asociadas a la intensidad de descarga y al empuje. En ellas se pueden observar dos oscilaciones claramente definidas: una de menor amplitud y mayor frecuencia ( $\sim 120$  kHz) y otra de mayor amplitud pero de menor frecuencia ( $\sim 20$  kHz).

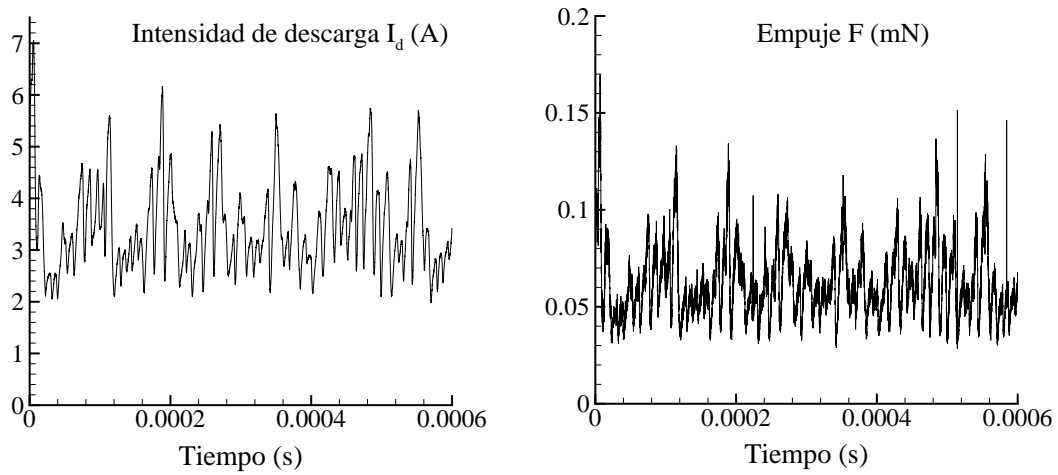


Figura 7.7: Gráficos temporales de intensidad de descarga y empuje.

Para entender mejor a qué procesos están asociadas conviene analizar otra información más en detalle. Por ejemplo, en la figura (7.9) se presentan los gráficos bidimensionales correspondientes a distintos instantes temporales y durante un periodo de  $17.5 \mu\text{s}$ . En ella se puede observar que la oscilación de mayor frecuencia (periodo de  $8 \mu\text{s}$ ) va asociada a la formación de frentes de ionización que avanzan por el canal.

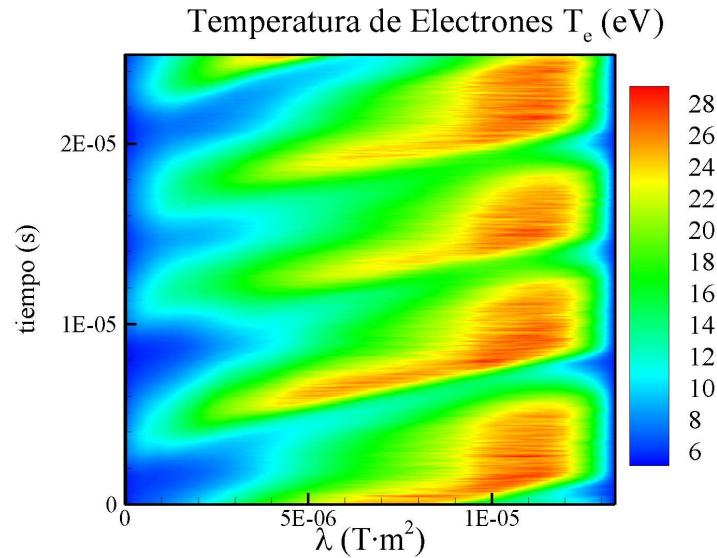


Figura 7.8: Gráfico temporal de la variación de la temperatura a lo largo de tiempo en el interior del canal en función de la coordenada magnética  $\lambda$

Por otro lado en la figura (7.8) se observa la evolución temporal de la temperatura en un plano (x-t) para un periodo de tiempo de  $25 \mu s$ . De nuevo la frecuencia de mayor frecuencia se presenta y parece estar ligada a la aparición de un pico de temperatura que avanza por el canal y sustituye al ya existente. Eso está en consonancia con la existencia de frentes de ionización.

Con estos dos análisis se llega a la conclusión de que la oscilación de mayor frecuencia se corresponde con una asociada al tiempo de residencia de iones y afecta en gran medida al proceso de ionización.

La otra oscilación dada su rango de frecuencias puede encuadrarse dentro del tipo de oscilaciones conocidas como ‘breathing’. Sin embargo un estudio más profundo es necesario para analizar las consecuencias que lleva consigo.

Precisamente el estudio de oscilaciones en motores Hall es uno de los campos en los cuales se está investigando más hoy en día. Ello es debido a que las oscilaciones en potencia, intensidad, etc. obligan a encarecer la unidad de control de potencia del motor (PPU), y afectan también a las comunicaciones debido a fenómenos de interferencia electromagnética.

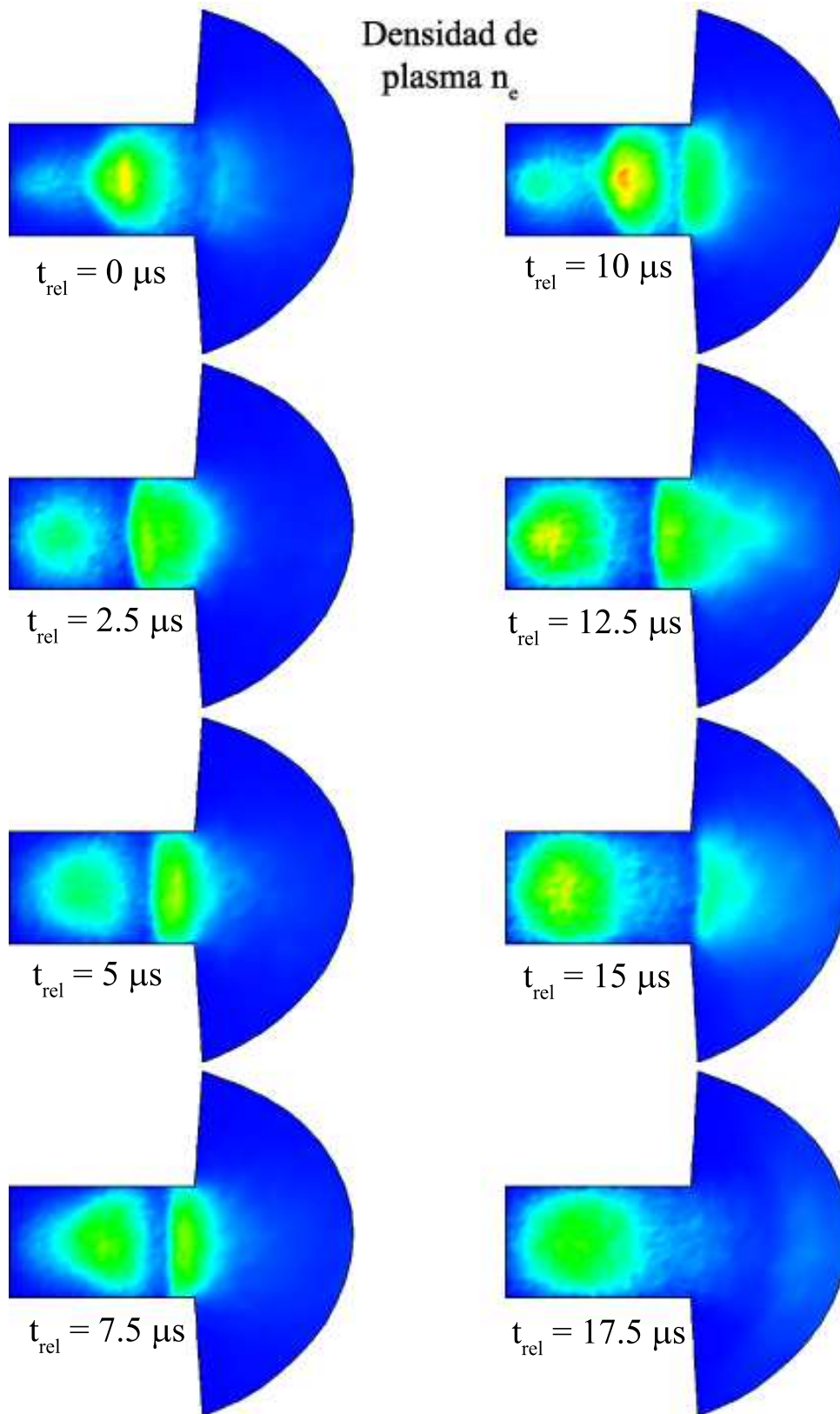


Figura 7.9: Secuencia de una oscilación de alta frecuencia en la densidad  $n_e(m^{-3})$ .

## 7.6. Influencia de la presencia de iones dobles para el motor SPT-100.

En esta sección se pretende mostrar la importancia de los iones dobles incluso a potenciales relativamente bajos. Con ese fin se van a comparar los resultados obtenidos con el código de simulación HPHall considerando y sin considerar iones dobles para el motor SPT-100 con un potencial de descarga de 300V y con el resto de parámetros mantenidos como en los apartados anteriores.

En primer lugar, en la figura (7.10) se muestran las densidades de iones simples y dobles en la línea media del canal, así como la carga equivalente definida como el cociente entre la densidad de electrones e iones total (es una medida adimensional de la importancia de los iones dobles).

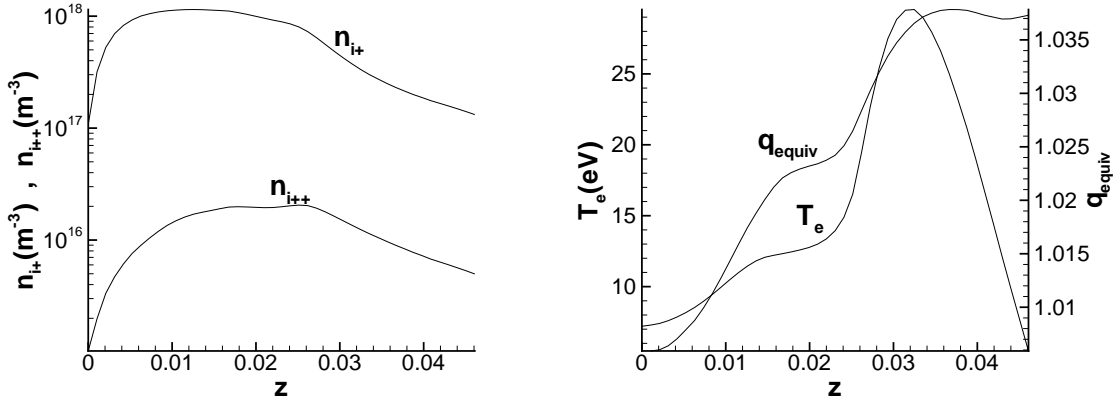


Figura 7.10: Densidades de iones simples y dobles (izquierda) y carga equivalente y temperatura de electrones (derecha) en la línea media del canal ( $r=42.5$  mm).

A la vista de las figuras anteriores se observa que la densidad de iones dobles es entre 10 y 100 veces inferior a la de iones simples. Además, la zona del canal de aceleración donde la carga equivalente es mayor se corresponde con la zona de mayor temperatura. Esto es lógico pues la tasa de ionización doble se hace más importante en términos relativos cuanto mayor es la temperatura.



A pesar de que en términos de densidad los iones dobles son despreciables si se evalúa su influencia sobre la eficiencia y el empuje la influencia es importante. Por ejemplo, la eficiencia de ánodo para el caso sin iones dobles es  $\eta_a = 0.378$ , mientras que para el caso con iones dobles  $\eta_a = 0.397$ . Esta diferencia del 5 % a favor del caso con iones dobles se corresponde totalmente con el hecho de que el empuje debido a iones dobles es del 6 % del total. Para entender esto basta con observar que la velocidad de iones dobles idealmente sería  $\sqrt{2}$  superior a la de iones simples a la salida del canal con lo que su contribución al empuje es mayor de lo que se esperaría atendiendo a las densidades.

Por otro lado, ya se ha mencionado que el hecho de tener un flujo con dos especies a velocidades muy diferentes tiende a disminuir la eficiencia. Sin embargo, la consideración de la ionización doble tiende a aumentar la utilización del propulsante pues la tasa de ionización aumenta. En términos numéricos se pasa de  $\eta_u = 0.743$  en el caso sin iones dobles a  $\eta_u = 0.773$  si se consideran iones dobles. Para poder evaluar la influencia negativa real de los iones dobles en el chorro sería necesario analizar los resultados de un caso con iones simples solo pero con una tasa de ionización igual a la del caso con iones dobles. En cualquier caso una medida de dicha influencia viene dada por la utilización de carga que en el caso de 300V es de  $\eta_q = 0.993$ .

En cuanto a la comparación de estos resultados con resultados experimentales cabe señalar que Hofer en [7] para un motor diferente y para un potencial de 300V obtiene una utilización de carga de  $\eta_q = 0.986$ . Es decir, para ese caso los iones dobles tienen aún más importancia si cabe. Obviamente los resultados no se parecen pues se trata de distintos motores y el modelo aquí presentado todavía requiere algunas mejoras.

Una conclusión importante de este análisis es que los iones dobles tienen una importancia superior a la que se pensaba al inicio del proyecto incluso para potenciales de descarga bajos. Así nuestro modelo predice una influencia del orden del 5 % en empuje y eficiencia. Para motores como el ensayado por Hofer, donde la importancia de iones dobles es mayor a la vista de la utilización de carga publicada en [7], la influencia de los iones dobles en eficiencia y empuje puede ser aún mayor. Por tanto, si se pretende modelar con cierta precisión motores de efecto Hall es necesario tener en cuenta los iones dobles en los cálculos.

### 7.7. Influencia del potencial de descarga y del campo magnético.

Los motores de efecto Hall de alto impulso específico, como se señaló anteriormente en el primer capítulo, vienen caracterizados por un potencial de descarga superior a lo habitual. Por ello es interesante analizar la variación de los distintos parámetros de funcionamiento al aumentar el potencial de descarga e identificar los problemas asociados a estas condiciones de funcionamiento.

En este apartado se muestran los resultados obtenidos para un motor del tipo SPT-100 para distintos valores del potencial de descarga impuesto entre el ánodo y el cátodo (funcionamiento con una sola etapa). El resto de parámetros característicos del motor (gasto másico, topología del campo magnético, geometría, etc.) se mantienen como en las simulaciones anteriores, excepto la intensidad del campo magnético.

Para mantener la corriente de descarga en un valor aproximadamente constante la intensidad del campo magnético es variada linealmente con el potencial de descarga. Como se verá más adelante, esta técnica resulta ser muy efectiva a la hora de mantener la intensidad de la descarga constante. Además, en [59] se demuestra que una variación lineal del campo magnético es óptima en términos de eficiencia, aunque hay cierta controversia con respecto a esto de acuerdo a otros resultados experimentales y numéricos.

En la figura (7.11) se muestra la variación de los parámetros de funcionamiento del motor más importantes para los casos de potencial de descarga analizados ( $V_d=150\text{V}$ ,  $300\text{V}$ ,  $450\text{V}$ ,  $600\text{V}$  y  $750\text{V}$ ), junto con otras variables de interés. (Recuérdese que el potencial nominal para un motor del tipo SPT-100 es de  $300\text{ V}$ ).

Algunos comentarios de interés son:

- el impulso específico en un caso ideal varía como la raíz cuadrada del potencial de descarga para gasto másico constante. Ello es debido a la mayor aceleración del flujo de iones. Esta tendencia es reproducida de forma muy clara por el código. Así, para el caso de referencia de  $300\text{ V}$  se tiene un impulso de específico de  $1360\text{ s}$ . Eso implicaría que para el caso de  $750\text{ V}$  idealmente el impulso específico sería de  $2150\text{ s}$  mientras que el valor obtenido en la simulación es cercano a  $2220\text{ s}$ . Esta pequeña diferencia

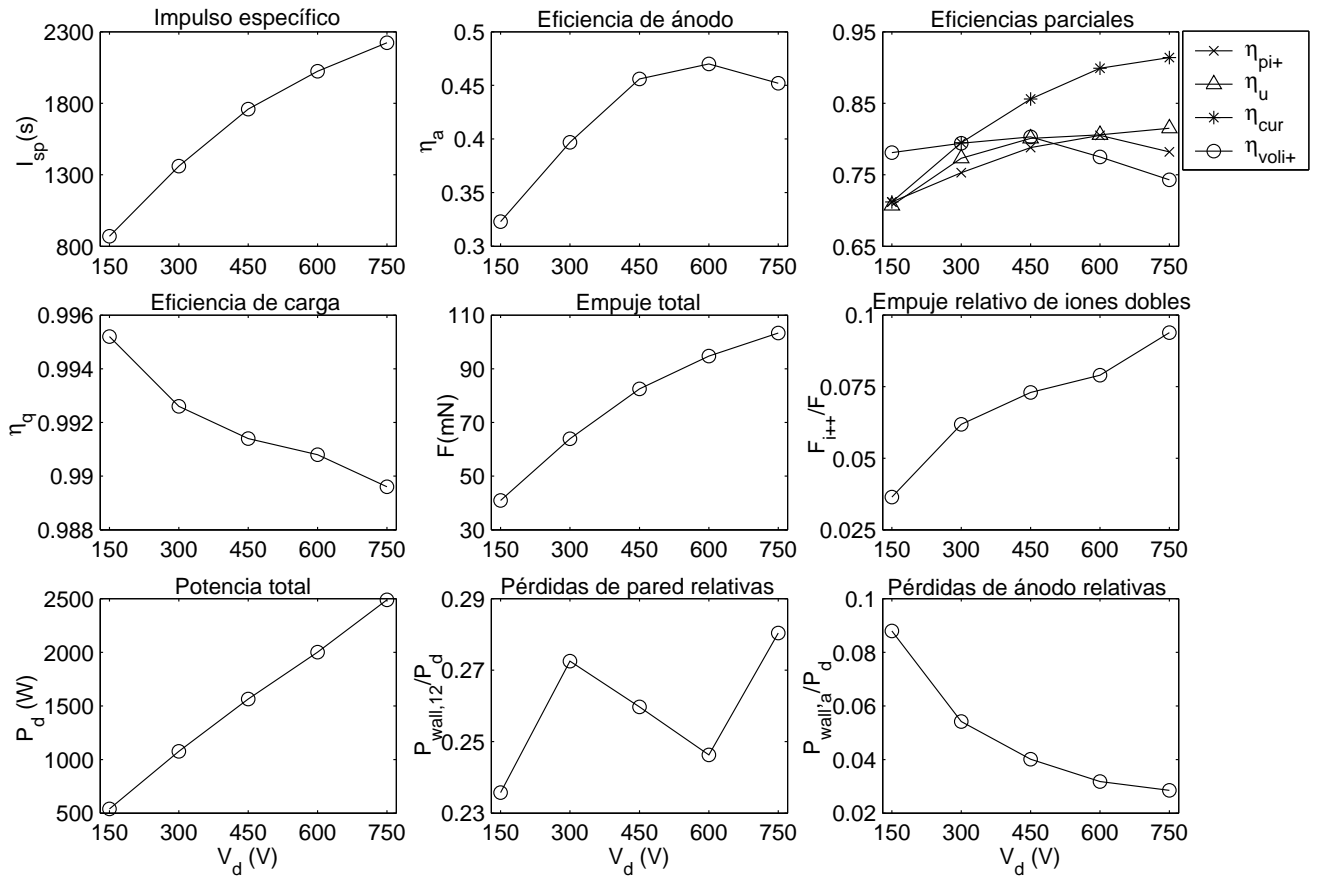


Figura 7.11: Resultados de la variación paramétrica del potencial de descarga

se debe fundamentalmente al incremento de la eficiencia del motor con respecto al caso de partida, en particular, de la utilización del propulsante, a pesar del descenso experimentado por la utilización del voltaje.

- por otro lado, la eficiencia de ánodo aumenta con el potencial eléctrico hasta los 600V, valor a partir del cual se produce un descenso. Este comportamiento aparece en muchos resultados experimentales y se suele asociar a la ionización doble. Sin embargo, más adelante se muestra que esto no es así mediante una comparación con los resultados obtenidos para una simulación sin iones dobles. Por contra en [7] se comprueba experimentalmente que el descenso en la eficiencia se debe a que la topología del campo magnético está optimizada para potenciales bajos. A este respecto se harán más comentarios cuando se presenten los perfiles de temperatura.

- atendiendo a las variaciones de las distintas eficiencias parciales se comprueba que el descenso de la eficiencia total se debe a descensos en la utilización del voltaje ( $\eta_{voli+}$ ) y a un aumento en la divergencia del chorro ( $\eta_{pi+}$ ). Por el contrario, tanto la utilización del propulsante como la utilización de la corriente aumentan lo cual es totalmente lógico pues para un mismo gasto másico se tiene un campo magnético mayor que tiende a mejorar el proceso de ionización.
- en cuanto a la influencia de la ionización doble se observa que por un lado la eficiencia de carga disminuye y la contribución al empuje de los iones dobles aumenta. Esto se corresponde totalmente con el hecho de que mayores potenciales de descarga implican mayor temperatura de electrones, con lo que el fenómeno de la ionización múltiple se vuelve más importante.
- por su parte el empuje varía de forma similar al impulso específico como es lógico pues el gasto másico se mantiene constante.
- como ya se señaló anteriormente, la variación de la intensidad del campo magnético ha permitido mantener la intensidad de la descarga constante, por lo que la potencia varía linealmente con el potencial de descarga. Así, para un potencial de 300V con una potencia de 1075W, una extrapolación lineal para 750V da una potencia de 2690W frente a un valor obtenido de 2490W, lo que supone una variación de tan solo el 7% con respecto a la ley lineal.
- en cuanto a las pérdidas a las paredes laterales se observa un descenso relativo para potenciales de descarga crecientes. Esta tendencia se rompe para los casos extremos de 150V y 750V. En el caso de 750V se debe al perfil de temperatura de electrones que presenta un pico en el interior del canal (ver figura 7.12). Finalmente, en cuanto a las pérdidas de ánodo se observa un descenso relativo, aunque en cualquier caso este término de pérdidas es despreciable frente al de pérdidas a las paredes laterales.

En la figura (7.12) se muestran los perfiles de las principales magnitudes a lo largo del canal en la línea media del mismo. En ella se observan las diferencias en estos perfiles para los casos de 300V, 600V y 750V analizados en esta sección.

Por un lado, el perfil de temperaturas en todos los casos presenta un pico en el exterior del canal como se suele encontrar experimentalmente y corresponde al incremento de energía de los electrones debido al calentamiento Joule. Además, este pico de temperaturas se hace mayor cuanto mayor es el potencial eléctrico.

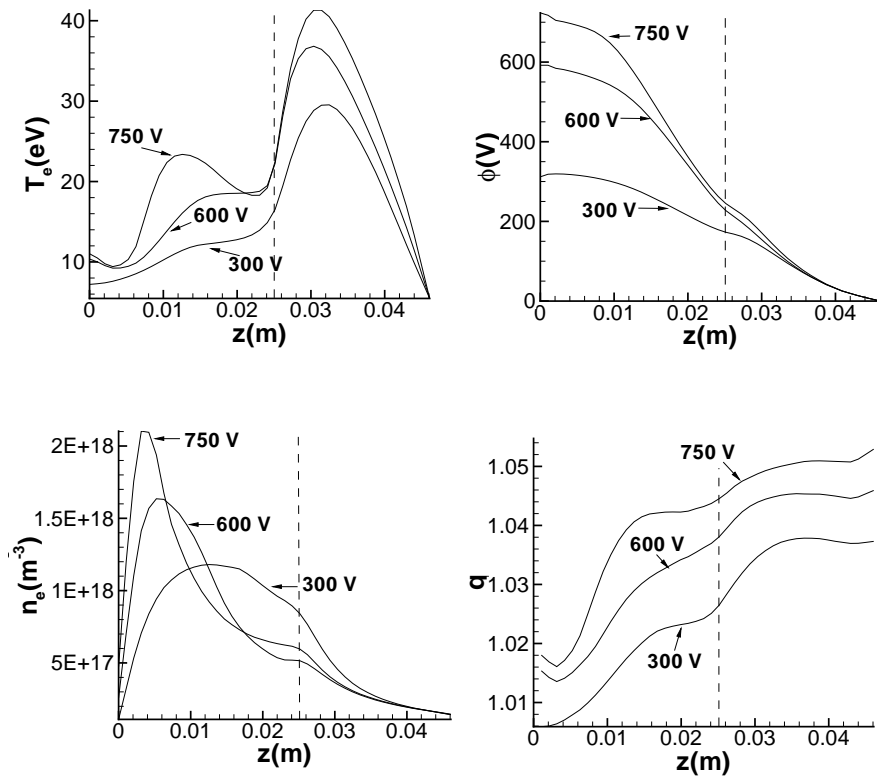


Figura 7.12: Temperatura de electrones  $T_e$ (eV), potencial eléctrico  $\phi$ (V) , densidad de electrones  $n_e$ ( $m^{-3}$ ) y carga equivalente  $q$  en la línea media del canal ( $r=42.5$  mm) para distintos potenciales de descarga ( $V_d = 300V, 600V, 750V$ ).

Por otro lado, resulta interesante observar que en el caso de 750V se presenta un segundo pico en el interior del canal. Ésta parece ser la causa del comportamiento de la eficiencia de ánodo explicada anteriormente pues provoca unas mayores pérdidas hacia las paredes. Esto está en consonancia con los resultados de Hofer en [59] que muestran como para una

topología optimizada para potenciales bajos la eficiencia presenta un máximo para potenciales altos. Sin embargo según esa referencia, si la topología del campo es modificada de forma que se tenga un campo magnético radial negativo en la zona del ánodo y cercano a cero en la zona donde aquí se predice un segundo pico en la temperatura, la eficiencia crece de forma continua sin presentar un máximo. Así, un menor campo magnético tendería a disminuir la resistencia de los electrones en esa zona y con ello se evitaría la presencia de un segundo pico en la temperatura. Esta explicación requiere una comprobación más exhaustiva obteniendo resultados con otras topologías de campo magnético pero inicialmente es válida.

En cuanto al perfil del potencial eléctrico se pueden realizar diversos comentarios:

- el perfil para el caso de 300V es totalmente normal, presentando la zona de flujo reverso de iones, zona de ionización y zona de aceleración de iones. Además el valor del potencial en la entrada a la vaina de ánodo es superior a 300V con lo que la hipótesis de una vaina repulsora de electrones queda justificada.
- en los casos de 600V y 750V el potencial eléctrico en la transición a vaina de ánodo queda por debajo de dichos valores con lo que la existencia de una vaina repulsora de electrones queda en entredicho. El modelo no está preparado actualmente para dicha situación aunque se considera que esto no afecta en exceso a los resultados. Además esta situación se da solo en parte del ánodo como se puede observar en la figura (7.13).

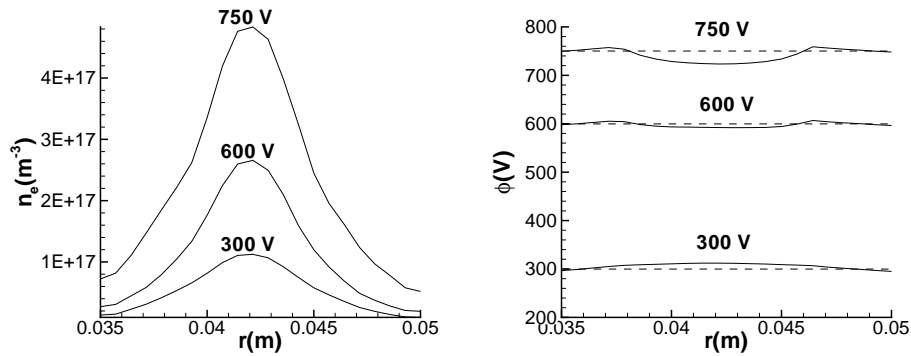


Figura 7.13: Densidad de electrones  $n_e(m^{-3})$  y potencial eléctrico  $\phi(V)$  en la transición a vaina de ánodo ( $z = 0$  mm) para distintos potenciales de descarga ( $V_d = 300V, 600V, 750V$ ).

- en el caso de 750V se puede observar como hay una caída de potencial en la zona donde se predice el segundo pico en la temperatura. Tras ello, el potencial alcanza unos valores semejantes al caso de 600V. Esto explica el que la utilización del voltaje descienda para este caso pues las zonas de ionización y de aceleración tienden a mezclarse provocando que el proceso de aceleración sea menos eficiente.
- la existencia de una vaina repulsora de iones provoca que el potencial eléctrico sea decreciente incluso en la zona del ánodo lo cual explica la subida de la temperatura en dicha zona debido al calentamiento Joule.

En lo referente al perfil de densidad de electrones se puede observar el hecho de que la zona de aceleración comienza más cerca del ánodo al aumentar el potencial de la descarga como es lógico a la vista del perfil del potencial eléctrico.

Finalmente, la gráfica de la carga equivalente muestra como la presencia de iones dobles crece a medida que se avanza según el canal haciéndose máxima en el chorro exterior debido al pico de temperatura presente en dicho chorro.

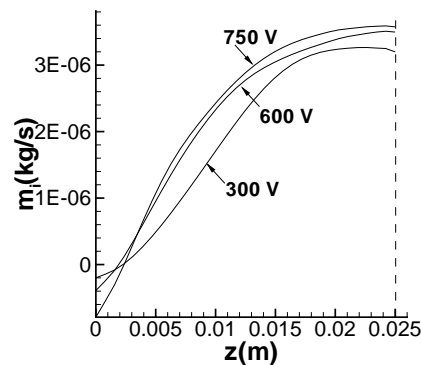


Figura 7.14: Flujo másico de iones a lo largo del canal para distintos potenciales de descarga ( $V_d = 300\text{V}$ ,  $600\text{V}$ ,  $750\text{V}$ ).

Por otro lado también es interesante observar la influencia del potencial de descarga en las zonas de flujo reverso de iones, de ionización y de aceleración. Para ello se puede observar la figura (7.14) donde se muestra el flujo másico de iones a lo largo del canal para los tres potenciales de descarga considerados. En primer lugar se debe tener en cuenta que a gasto

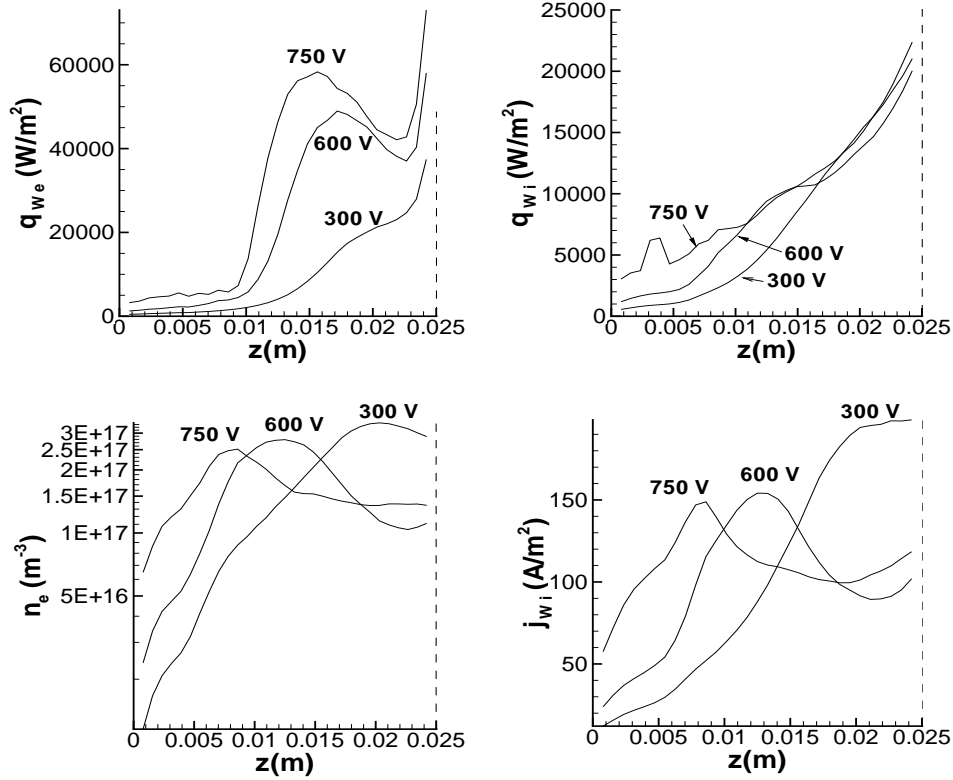


Figura 7.15: Flujo de energía de electrones a la pared exterior  $q_{we}(W/m^2)$ , flujo de energía de iones a la pared exterior  $q_{wi}(W/m^2)$ , densidad de electrones en la transición a vaina de la pared exterior  $n_e(m^{-3})$  y corriente de iones a la pared exterior  $j_{wi}(A/m^2)$  para distintos potenciales de descarga ( $V_d = 300V, 600V, 750V$ ).

másico constante, cuanto mayor es el potencial, mayor es la utilización del propulsante y por ello el valor de flujo másico de iones alcanzado a la salida del canal es mayor. Además, la zona de flujo másico nulo se presenta aproximadamente en la misma zona, siendo mayor el flujo de iones al ánodo para mayores potenciales. Esta última conclusión debe tomarse con cuidado pues la vaina repulsora de iones no está bien modelada.

En la figura (7.15) se puede observar la comparación de las principales variables relacionadas con las pérdidas a la pared exterior. Por un lado las pérdidas energéticas asociadas a los electrones son mayores cuanto mayor es el potencial de descarga y en particular se observa la influencia del segundo pico de temperatura en el caso de 750V. Por otro lado se observan las pérdidas asociadas a los iones que resultan ser similares para los distintos casos salvo en la zona cercana al ánodo donde para 600V y 750V las densidades son mayores.



Finalmente se muestra el flujo de iones a la pared que resulta ser mayor para el caso de 300V. Esto parece ser debido a un peor direccionamiento de los iones en el proceso de aceleración, es decir, cuanto mayor es el potencial de descarga más complicado es para los iones alcanzar la pared debido a las mayores velocidades axiales. Eso explica el descenso de la divergencia del chorro recogido a través de la variable  $\eta_{pi+}$  y que se puede observar en el gráfico bidimensional de la figura (7.16). Sin embargo, a pesar de que el flujo de iones es menor para los potenciales de descarga mayores, las pérdidas energéticas son semejantes. Ello es debido a que el flujo de iones, aunque menor es más energético pues ha sido acelerado por una caída de potencial mayor.

Este último análisis es importante pues la erosión de las paredes cerámicas depende del flujo de iones a las paredes y de la energía de impacto de los mismos. Más adelante se muestra como poder calcular la erosión de las paredes mediante un método muy sencillo, aunque a la vista de estos resultados parece que no hay grandes variaciones de un caso a otro.

En los gráficos bidimensionales de la figura (7.16) se puede observar la variación de la densidad de electrones y el flujo axial de iones. En ellas se recogen muchas de las características anteriormente mostradas en gráficos unidimensionales.

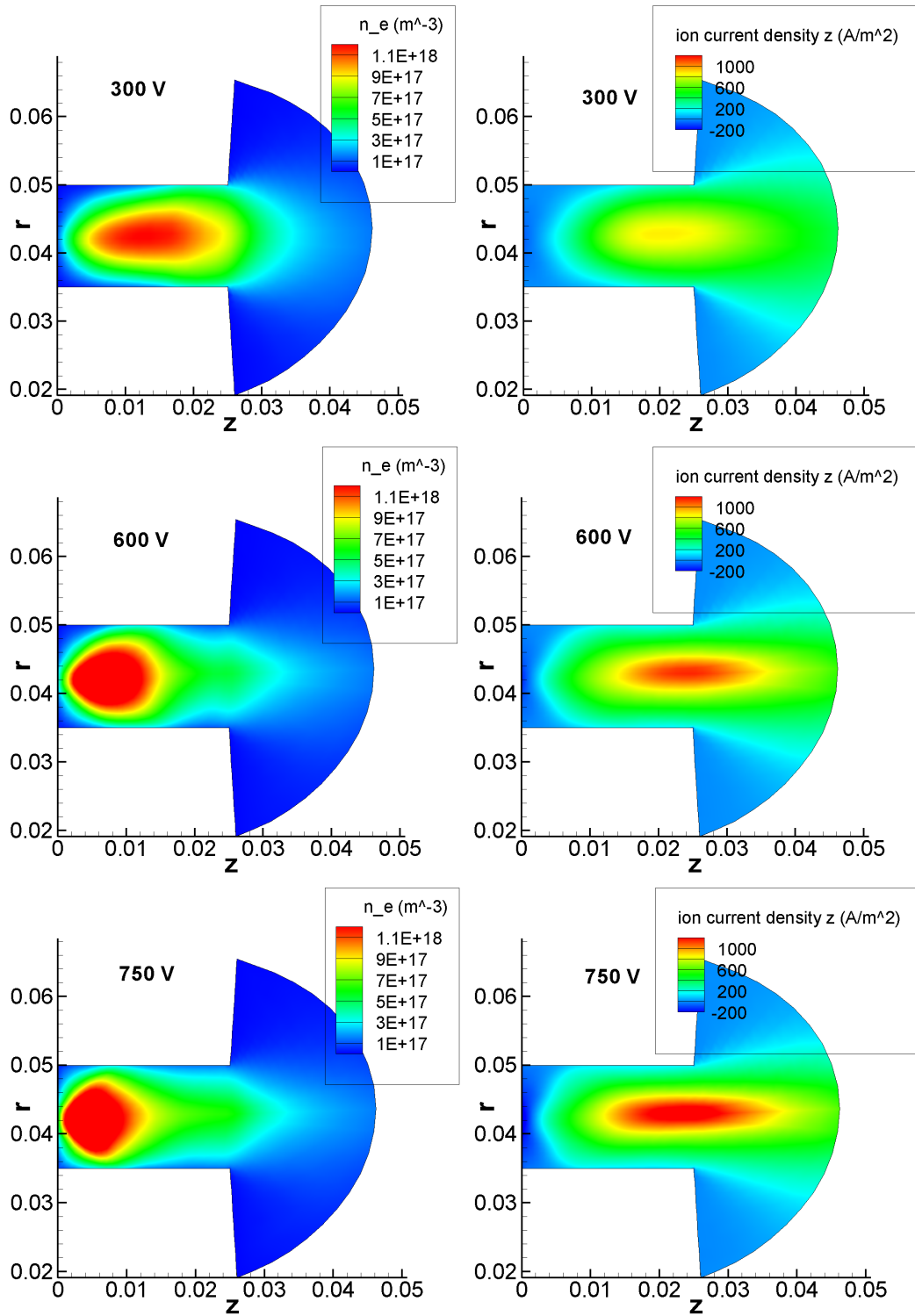


Figura 7.16: Densidad de electrones  $n_e(\text{m}^{-3})$  (columna izquierda) y corriente axial de iones  $j_{iz}(\text{A}/\text{m}^2)$  (columna derecha) en todo el canal para distintos potenciales de descarga ( $V_d = 300\text{V}, 600\text{V}, 750\text{V}$ ).

### 7.7.1. Comparación de resultados con/sin ionización múltiple.

Una de las conclusiones de este proyecto es que la ionización doble juega un papel no despreciable incluso para potenciales bajos como quedo demostrado al analizar los resultados para el caso de 300V considerando y sin considerar la ionización múltiple. En la figura (7.17) se muestra la diferencia existente entre los resultados obtenidos al variar el potencial de descarga cuando se simulan los iones dobles y cuando la ionización múltiple es despreciada.

Como ya se explicó en las secciones anteriores el considerar la ionización múltiple tiende a aumentar la eficiencia total, el empuje,... lo cual es debido a que la utilización del propulsante es mayor. Además, a mayor potencial de descarga, y con ello mayor temperatura de electrones, las diferencias se hacen más notables. Por otro lado, los resultados son interesantes pues muestran como el pico de eficiencia se presenta a 500V cuando no se simula la ionización múltiple. En cualquier caso estos resultados muestran que la presencia de un máximo en la eficiencia al aumentar el potencial de descarga no se debe a la ionización doble.

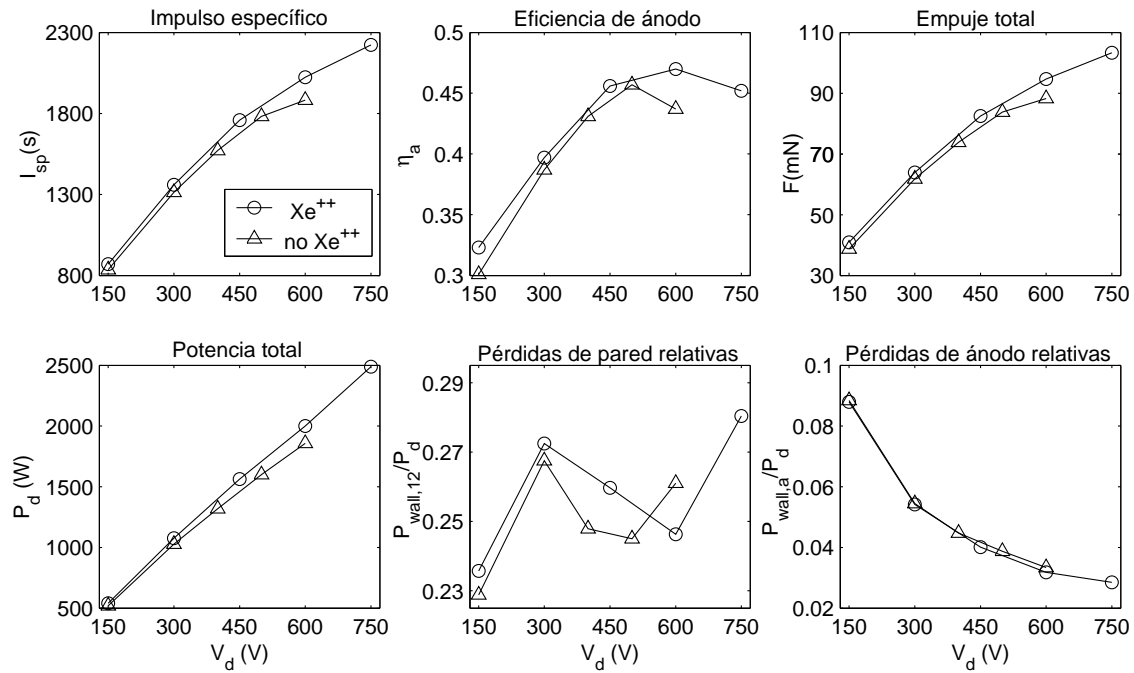


Figura 7.17: Influencia de la ionización secundaria sobre la variación paramétrica del potencial de descarga

## 7.8. Operación dual a potencia constante.

En esta sección se presentan los resultados obtenidos para la variación a potencia constante del gasto másico. Esto se corresponde con el marcado interés que existe hoy en día por poder utilizar los motores de efecto Hall en dos regímenes de funcionamiento bien diferentes para una misma potencia: un régimen de alto impulso específico y bajo empuje y otro régimen de bajo impulso específico y alto empuje.

De igual forma que en la anterior sección todos los parámetros se mantienen constantes durante la variación paramétrica salvo el gasto másico, la intensidad de campo magnético y el potencial de descarga que se permite variar a lo largo del tiempo con objeto de mantener la potencia eléctrica constante. El caso de partida se corresponde con el de potencial de descarga de 600V con un gasto de 5 mg/s pues supone un máximo de la eficiencia (similar al del caso de 4.8 mg/s mostrado anteriormente). Respecto a ese caso de referencia la intensidad del campo magnético se varía de forma que descensos del gasto másico requieren incrementos del campo magnético con objeto de mantener una utilización de propulsante aceptable. En particular, la intensidad del campo magnético se aumenta un 12.5 % al pasar de 5mg/s a 4 mg/s de gasto másico. Esta ley está basada en los resultados mostrados en ([6]).

En la figura (7.18) se representa la variación de los principales parámetros con el gasto másico para los casos analizados de  $\dot{m}_a=3$  mg/s, 4mg/s, 5mg/s y 6mg/s.

Algunos comentarios acerca de dichos resultados son:

- se observa el funcionamiento en los dos regímenes, uno a bajo gasto másico y alto potencial de descarga y otro al contrario. En particular para un gasto de 3 mg/s se tiene un potencial de descarga de casi 1000V, un impulso específico de 2700s y un empuje de 78 mN frente al caso de 6 mg/s en el que se tiene un potencial de cerca de 490V, un impulso específico superior a 1750s y un empuje de 103 mN.
- la variación del impulso específico se corresponde con el hecho de que a potencia constante el potencial de descarga es en primera aproximación inversamente proporcional al gasto másico. Por tanto, el impulso específico es proporcional a la inversa de la raíz

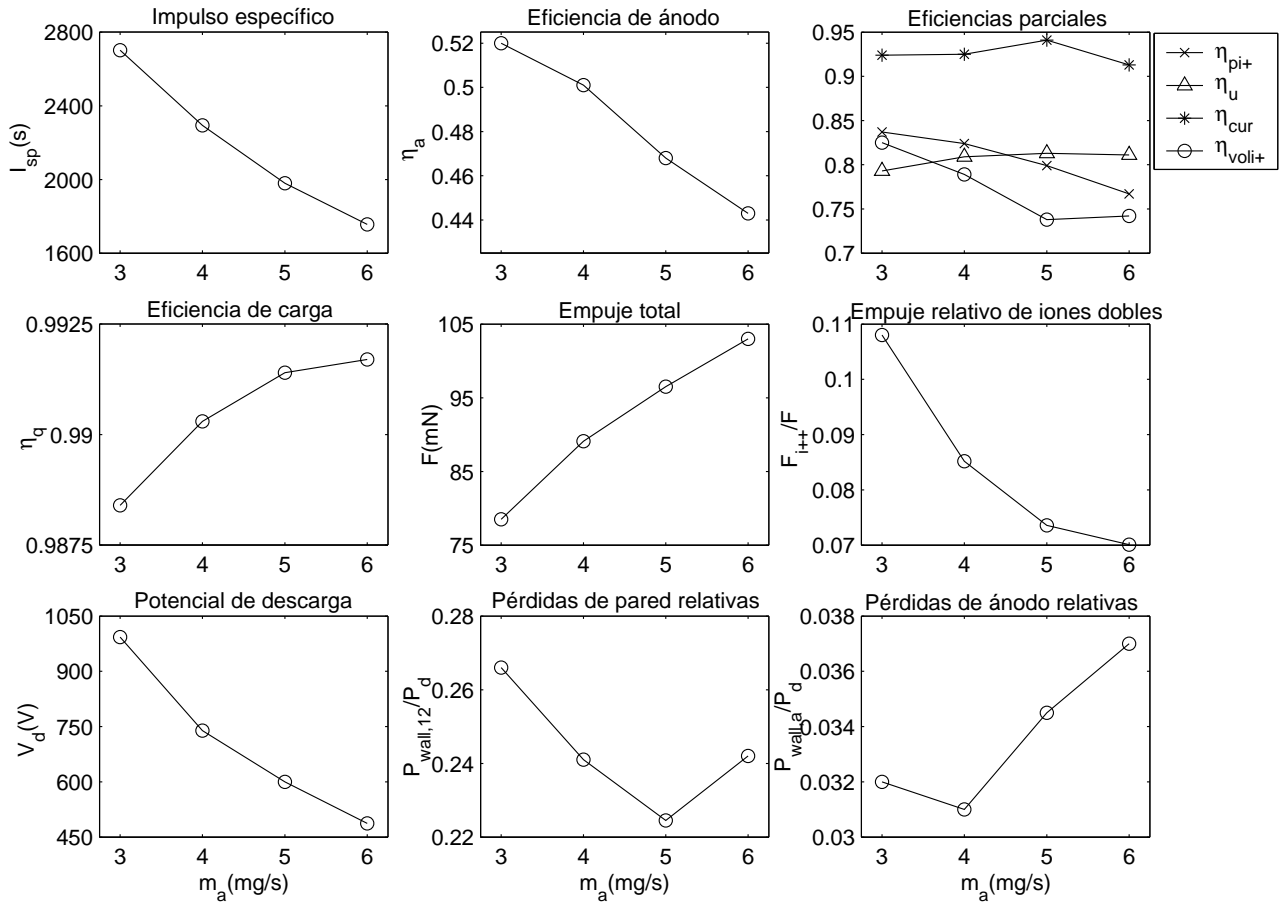


Figura 7.18: Resultados de la variación paramétrica del gasto másico manteniendo constante la potencia del motor en  $P_d = 2\text{ kW}$

cuadrada del gasto másico. Así, partiendo de 1750s a 6mg/s se tendría a 3 mg/s un impulso específico de casi 2500s frente al valor calculado de 2700s. La diferencia se debe fundamentalmente al aumento de la eficiencia de ánodo al disminuir el gasto másico y que a continuación se comenta.

- según los resultados obtenidos al disminuir el gasto másico aumenta la eficiencia, lo cual va en contra de lo que se establece en [6] para una variación paramétrica similar con un modelo estacionario unidimensional. En esa referencia se predice un descenso de la eficiencia al disminuir el gasto másico debido al descenso de la utilización del propulsante pues el proceso de ionización es menos eficiente al tener densidades de neutros

inferiores. En nuestro caso, este descenso en la utilización del propulsante también se observa. Incluso, las pérdidas a pared aumentan en término relativos con lo que cabría esperar un descenso en la eficiencia. Sin embargo, estos efectos negativos se compensan con el hecho de que el proceso de aceleración se vuelve muy eficiente a gastos máscicos bajos según se ve en la evolución de la utilización del voltaje y con el hecho de que la utilización de corriente también aumenta. Esta última tendencia de la utilización de la corriente también se recoge en [6] y se debe al campo magnético más fuerte.

- en cuanto a la eficiencia de carga y la contribución de los iones dobles al empuje se observa una tendencia similar a la observada al variar el potencial eléctrico. Es decir, a potenciales de descarga altos la importancia de los iones dobles aumenta.
- la variación del empuje no es lineal con el gasto máscico pues a potencia constante un mayor gasto implica un menor potencial de descarga y con ello una velocidad del chorro de iones menor. En primera aproximación el empuje debería ser proporcional a la raíz cuadrada del gasto máscico, sin embargo la variación de la eficiencia hace que esta ley no se cumpla exactamente.
- por su parte el potencial de descarga debe variar inversamente al gasto máscico lo cual se observa en la figura. Así, para un gasto de 3 mg/s se tiene un potencial de 993 V, lo cual extrapolando a 6mg/s daría un potencial de casi 495V frente al valor obtenido de 487V. La pequeña diferencia puede deberse a variaciones de la utilización del propulsante y de la corriente comentadas anteriormente.
- en cuanto a las pérdidas de pared se observa que a pesar de que las densidades son menores para el caso de 3 mg/s las pérdidas a pared son mayores debido fundamentalmente al perfil de temperatura que vuelve a presentar un pico en el interior del canal

como ya se ha señalado en la sección anterior.

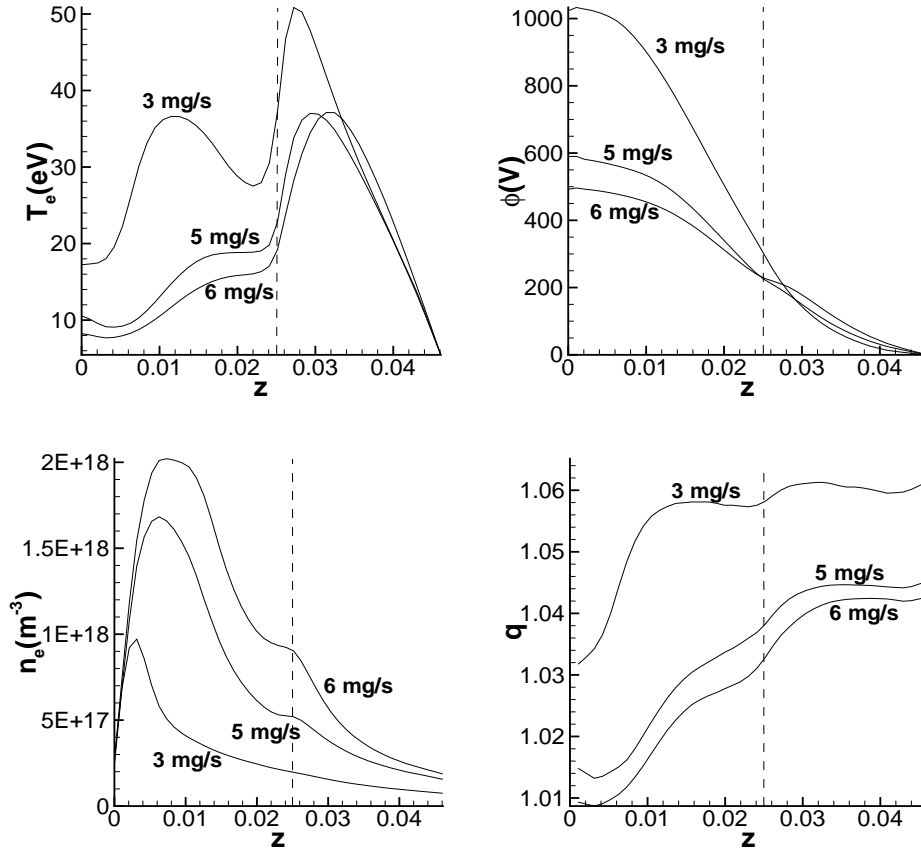


Figura 7.19: Temperatura de electrones  $T_e$  (eV), potencial eléctrico  $\phi$  (V), densidad de electrones  $n_e$  ( $m^{-3}$ ) y carga equivalente  $q$  en la línea media del canal ( $r=42.5$  mm) para distintos gastos máscicos a igualdad de potencia ( $\dot{m}_a = 3$  mg/s, 5 mg/s y 6 mg/s).

Por otro lado en la figura (7.19) se puede observar una comparación de los perfiles de las variables más importantes para los distintos gastos máscicos. Muchas de las características de estos perfiles se asemejan a las comentadas en la sección anterior, sobre todo el caso de 3 mg/s dado su elevado potencial de descarga. Cabe destacar sin embargo el hecho de que en ese mismo caso de alto potencial de descarga existe una vaina repulsora de electrones lo cual indica que la existencia de vaina repulsora de iones comentada en la sección anterior no va asociada al funcionamiento a alto potencial de descarga sino a otra circunstancia, posiblemente el campo magnético en ánodo.

Finalmente en la figura (7.20) se presentan las flujos de energía y de partículas hacia la pared. La explicación cualitativa de los resultados es clara: por un lado, en el caso de 3mg/s el mayor potencial de descarga asociado implica unas mayores temperaturas en el canal provocando que las pérdidas energéticas asociadas a los electrones sean mayores; por otro lado, el hecho de que el gasto másico sea menor para el caso de 3 mg/s, hace que tanto los flujos de iones como los flujos de energía de iones a la pared sean menores, sobre todo lejos del ánodo donde las densidades de iones son menores. Como consecuencia de ello, puesto que son las pérdidas de energía asociadas a los electrones las dominantes, el caso de 300V tiene unas pérdidas a la paredes laterales superiores como se en la figura (7.18).

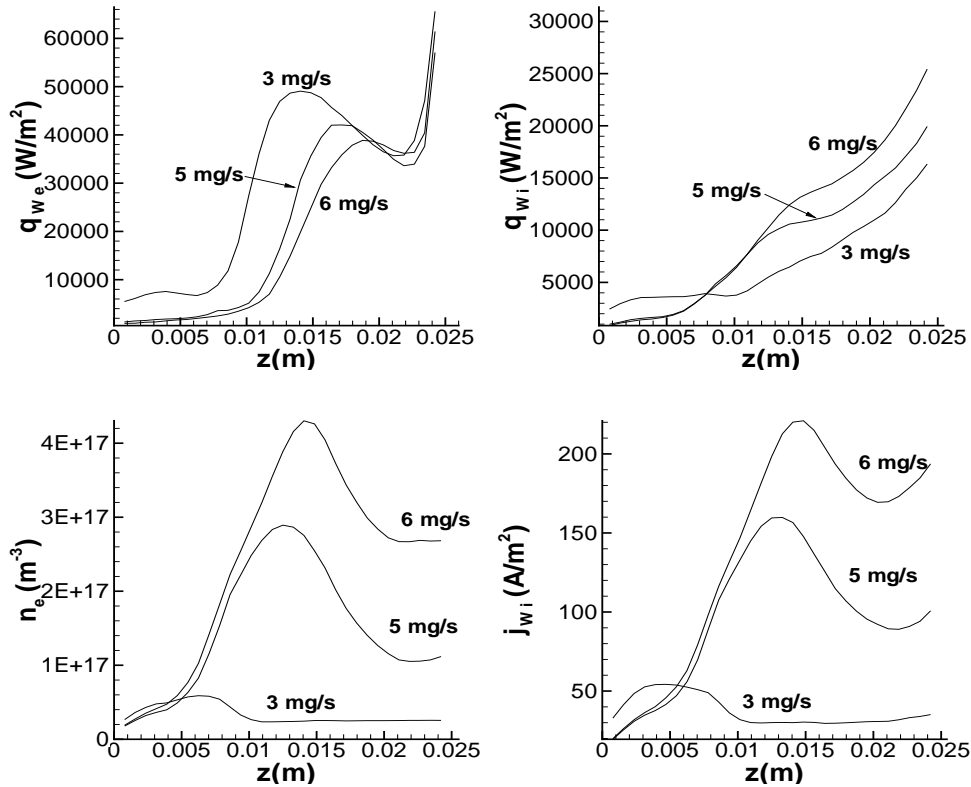


Figura 7.20: Flujo de energía de electrones a la pared exterior  $q_{we}$  (W/m<sup>2</sup>), flujo de energía de iones a la pared exterior  $q_{wi}$  (W/m<sup>2</sup>), densidad de electrones en la transición a vaina de la pared exterior  $n_e$  (m<sup>-3</sup>) y corriente de iones a la pared exterior  $j_{wi}$  (A/m<sup>2</sup>) para distintos gastos másicos a igualdad de potencia ( $\dot{m}_a = 3$  mg/s, 5 mg/s y 6 mg/s).



## 7.9. Motores de doble etapa

En esta sección se pretende mostrar otra de las nuevas posibilidades que ofrece el nuevo código de electrones, los motores de doble etapa. Como se comentó en el primer capítulo los motores de doble etapa se caracterizan por tener un electrodo en el interior del canal. Normalmente se trata de electrodo activos que introducen electrones en el canal dada su gran emisividad. Por tanto esto es equivalente a que la intensidad de corriente varía a lo largo del canal, una característica que no podía ser reproducida por el modelo anterior.

La variación paramétrica aquí mostrada es una primera aproximación al problema y en cualquier caso análisis más profundos son necesarios. Esta variación consiste en colocar un electrodo activo en la pared lateral exterior entre 20mm y 22mm de forma que esté en el límite de saturación de carga (CSL) en todo momento y su potencial varíe tal y como se explicó en el capítulo anterior. El parámetro a variar aquí es la intensidad a través de electrodo intermedio.

En este caso por simplicidad se toma como caso de referencia el de potencial de descarga 300V para el motor tipo SPT-100 sin electrodo intermedio. Todos los parámetros se mantienen como en el caso de referencia incluida la intensidad del campo magnético. Obviamente al cambiar la configuración del motor convendría optimizar tanto la intensidad del campo magnético como su topología. Sin embargo, en este análisis sólo se pretende mostrar la capacidad del modelo para reproducir electrodos intermedios y observar los efectos que tiene sobre el funcionamiento del motor sin intentar realizar un proceso de optimización.

Una desventaja del modelo utilizado es que su influencia sólo aparece a través de variables unidimensionales pues afecta básicamente a la temperatura y al potencial termalizado. Como consecuencia de ello, no aparecen asimetrías en los perfiles radiales a pesar de que el electrodo se encuentra únicamente en la pared externa. De cualquier manera ésta es una buena primera aproximación al problema.

En la figura (7.21) se presentan los perfiles de las principales variables en la línea media del motor para casos en los que la intensidad a través del electrodo es respectivamente 0.26A, 0.79A y 1.37A, así como para el caso de referencia sin electrodo. Los efectos de colocar el electrodo intermedio se pueden resumir en:

- en la zona donde se encuentra el electrodo la temperatura es inferior a la del caso de referencia debido a que el electrodo se ha supuesto saturado lo cual implica unas pérdidas energéticas superiores al caso de referencia. A medida que se aumenta la intensidad por el electrodo, la energía asociada al flujo de electrones introducido es mayor y eso tiende a compensar las pérdidas energéticas asociadas al electrodo.
- en el perfil de temperatura aparece un segundo pico como consecuencia del calentamiento Joule sobre el nuevo flujo de electrones introducido por el electrodo en dirección al ánodo. Además el pico de temperatura del chorro tiende a disminuir al aumentar la intensidad por el electrodo debido a que la corriente es menor en el chorro exterior.
- como consecuencia de lo anterior el perfil de potencial es tal que su valor sobre el electrodo es menor para valores mayores de la intensidad por el electrodo. A la vista del perfil de potencial parece que las zonas de ionización y de aceleración están menos mezcladas consiguiendo mejorar la eficiencia en dichos procesos. Esto se ve corroborado en los valores de la tabla (7.3).
- como consecuencia del pico de temperatura en el interior del canal, a pesar de que las pérdidas son mayores, los electrones tienden a acumularse en la zona cercana al ánodo haciendo que el proceso de ionización sea más eficiente. Esto hecho se observa en el gráfico de tasa de ionización, cuyo máximo crece a medida que la intensidad por el electrodo es mayor.

En términos de actuaciones la comparativa entre los distintos casos se resume en la tabla (7.3). En ella es interesante observar que para baja intensidad por el electrodo se consigue mejorar la eficiencia con respecto al caso de referencia. Esto se debe al aumento de la utilización del voltaje y del propulsante así como de la eficiencia del chorro conseguidos gracias

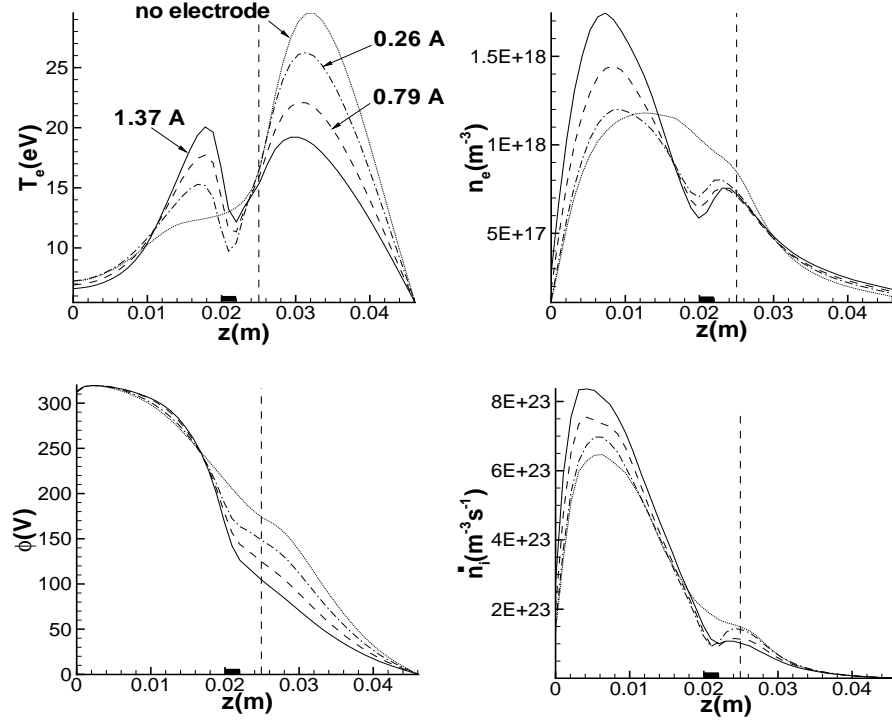


Figura 7.21: Temperatura de electrones  $T_e(eV)$ , densidad de electrones  $n_e(m^{-3})$ , potencial eléctrico  $\phi(V)$  y tasa de ionización total  $\dot{n}_i(m^{-3}s^{-1})$  en la línea media del canal ( $r=42.5$  mm) para distintos valores de la intensidad por el electrodo intermedio situado en la pared lateral exterior a 21mm del ánodo y de 2mm de anchura ( $\dot{m}_a = 0.26A, 0.79A$  y  $1.37A$ ). Como referencia se muestra el caso sin electrodo intermedio.

a la mejora del proceso de aceleración e ionización. Sin embargo, para intensidades por el electrodo superiores la eficiencia disminuye como consecuencia de la disminución drástica de la utilización de la corriente. Este hecho se debe sobre todo a que el campo magnético no ha sido optimizado para esa nueva configuración en la que el electrodo juega un papel importante. A pesar de ello, sigue existiendo una importante mejora en la utilización del voltaje y en la eficiencia del chorro.

$I_{electrode}(A)$	$\eta_a$	$I_{sp}(s)$	$\eta_{cur}$	$\eta_u$	$\eta_{vol,i+}$	$\eta_{p,i+}$
sin electrodo	0.40	1360	0.80	0.77	0.79	0.75
0.26	0.42	1443	0.78	0.81	0.80	0.78
0.79	0.37	1408	0.70	0.78	0.81	0.78
1.37	0.33	1380	0.62	0.75	0.81	0.79

Cuadro 7.3: Parámetros de operación variando la intensidad por el electrodo

Finalmente, en la figura (7.22) se observan los perfiles obtenidos modificando la posición del electrodo: en un caso se encuentra a 21mm del ánodo y en el otro a 16mm, aunque en ambos casos la anchura es de 2mm y se encuentra en la pared exterior. A la vista de los perfiles de potencial parece claro que la nueva posición del electrodo es mejor pues consigue separar aún más los procesos de ionización y de aceleración.

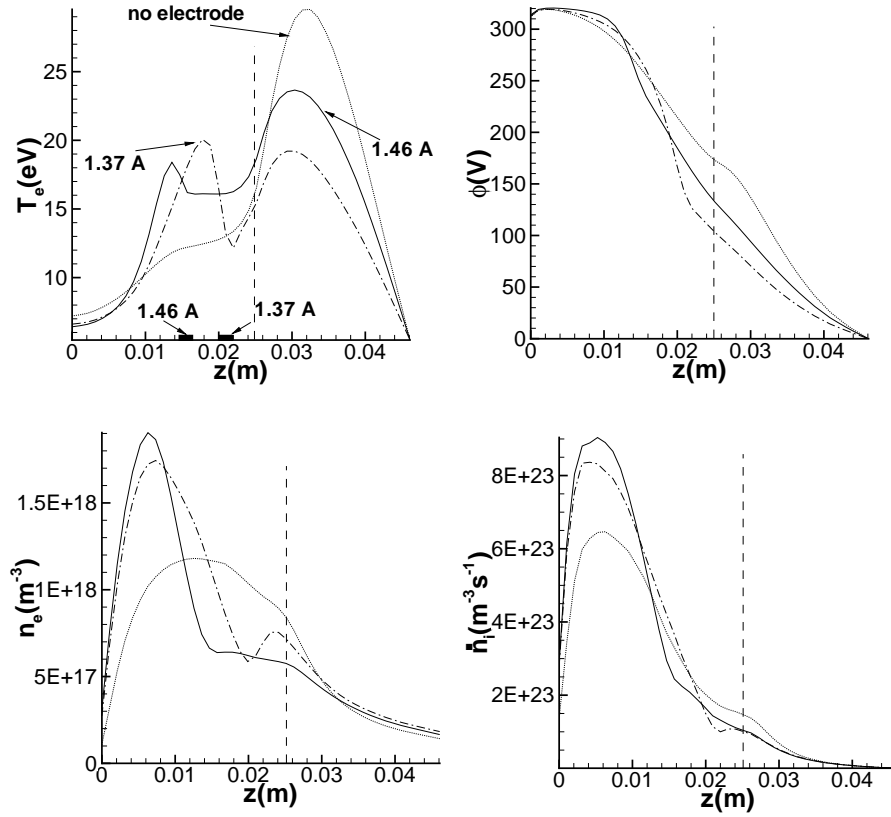


Figura 7.22: Temperatura de electrones  $T_e(eV)$ , potencial eléctrico  $\phi(V)$ , densidad de electrones  $n_e(m^{-3})$  y tasa de ionización total  $\dot{n}_i(m^{-3}s^{-1})$  en la línea media del canal ( $r=42.5$  mm) para distintas posiciones del electrodo y valores de la intensidad por el electrodo intermedio semejantes.

La comparativa de las actuaciones de cada configuración se muestra en la tabla (7.4). A la vista de estos resultados parece claro que para una intensidad por el electrodo semejante, la configuración con el electrodo a 16mm del ánodo es más eficiente gracias a una mejor utilización del voltaje y del propulsante. Sin embargo sigue padeciendo el mismo problema de falta de optimización del campo magnético como muestra la baja utilización de la corriente.

$I_{electrode}(A)$	$\eta_a$	$I_{sp}(s)$	$\eta_{cur}$	$\eta_u$	$\eta_{vol,i+}$	$\eta_{p,i+}$
sin electrodo	0.40	1360	0.80	0.77	0.79	0.75
1.37 (21mm)	0.33	1380	0.62	0.75	0.81	0.79
1.46 (16mm)	0.37	1550	0.61	0.82	0.87	0.81

Cuadro 7.4: Parámetros de operación variando la posición del electrodo

El hecho de que para esta nueva posición del electrodo a 16mm del ánodo prediga una mejor eficiencia está en consonancia con los resultados numéricos de [42].

A la vista de estos resultados parece obvio que el siguiente paso es modificar la topología del campo magnético así como su intensidad para lograr mejorar la eficiencia en los casos de mayor intensidad por el electrodo, aunque a la vista de las mejoras conseguidas para el caso de más baja intensidad las previsiones son buenas.

### 7.10. Erosión y cargas térmicas en paredes.

Uno de los estudios más interesantes a realizar en la actualidad son los relacionados con la erosión de las paredes pues este fenómeno conocido como sputtering es el factor determinante de la vida útil de los motores. Una de las opciones de los códigos de simulación es predecir la vida útil del motor sin necesidad de hacer ensayos demasiado costosos hasta la etapa de cualificación del motor.

La capacidad de HPHall en este sentido es la de admitir paredes de sección variable de forma que estudios de erosión pueden ser realizados. Así por ejemplo, en la gráfica 7.23 se presentan los flujos de corriente radiales de iones para un caso erosionado (izquierda) y para un caso sin erosionar (derecha). La influencia sobre el funcionamiento del motor es importante y conviene analizarla en tiempo de diseño. En general, la tendencia es a erosionar aquellas zonas donde el flujo de iones es mayor y con mayor energía. Esto ocurre fundamentalmente a la salida del canal de forma que la mayor erosión se produce ahí. Tras este proceso de erosión el flujo a la pared en esa zona disminuye haciéndose más uniforme en toda la superficie de la parte erosionada.

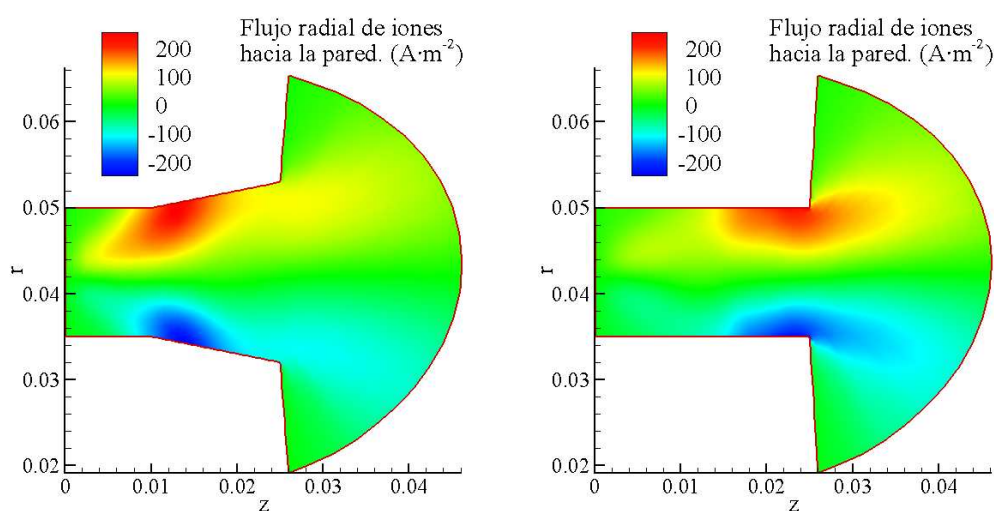


Figura 7.23: Reproducción del proceso de sputtering.

Un modelo de erosión para la velocidad a la cual se va erosionando la pared localmente viene dada por la siguiente expresión:

$$\frac{dl_n}{dt} = j_i W Y(E_i, \theta)$$

donde  $l_n$  es una coordenada espacial según la dirección perpendicular a la superficie y  $Y(E_i, \theta)$  es el llamado sputtering yield o factor de erosión que depende del ángulo de incidencia del flujo de energía de iones,  $\theta$ , y de la energía de los mismos al impactar,  $E_i$ . Una aproximación habitual es:

$$\frac{dl_n}{dt} = j_i W k E_i Y(\theta) = q_i W k Y(\theta)$$

donde la dependencias con respecto a la energía y del ángulo de incidencia se han separado apareciendo una dependencia lineal con el flujo de iones a la pared. La función  $Y(\theta)$  debe determinarse experimentalmente para cada material y es uno de los principales problemas hoy en día pues hay poca información sobre ello y la poca información existente no es de acceso público.

En cualquier caso, una vez caracterizado el material a través de su factor de erosión para un determinado motor sería posible caracterizar con HPHall la cantidad de material erosionado para un cierto número de horas. Tras ello, se modificaría la geometría de forma que se reproduzca la eliminación de dicho material y se volvería a ejecutar el programa. De esta forma iterativa se podría conocer la vida útil del motor predicha por el código de simulación.

Actualmente el código no presenta la posibilidad de realizar estos estudios y aunque las modificaciones necesarias para ello no serían costosas, el hecho de que las pérdidas a pared predichas por el código sean excesivas induce a pensar que cualquier estudio de erosión a realizar con HPHall en su estado actual conduciría a valores de vida útil muy inferiores a la realidad. Por tanto, y por motivos de tiempo este estudio se deja para más adelante.

### 7.11. Comparación con prototipos

El código en el estado de desarrollo en el que se encuentra actualmente no permite predecir con precisión el funcionamiento de motores concretos aunque ya ha demostrado tanto en este proyecto como en [57] su capacidad para reproducir las principales tendencias. El principal problema del presente modelo son las excesivas pérdidas hacia la pared que predice a pesar de que el modelo de interacción con pared es consistente. Ya se han propuesto ciertas mejoras que podrían solventar este problema.

En el ámbito de los posibles motores a comparar se encuentran los de la familia PPS (PPS-1350, PPS-5000) fabricados por Snecma. En particular, el modelo PPS-5000 cuya principal característica es ser un motor dual y del cual existen multitud de resultados experimentales publicados. O incluso los motores NASA-173v1/2 diseñados para funcionar a alto impulso específico.

En cualquier caso, uno de los problemas a la hora de simular motores reales es el desconocimiento del campo magnético. Es muy habitual en las publicaciones dar la topología del campo magnético pero sin ofrecer datos sobre la magnitud del mismo.



## Capítulo 8

# Conclusiones

La realización del presente proyecto ha logrado alcanzar muchos de los objetivos inicialmente marcados y ha permitido dar posibles respuestas a algunos de los problemas asociados a los motores Hall de alto impulso específico y motores duales. En el campo de los motores de doble etapa una parte importante del trabajo de modelización ha sido realizada ya y solo queda depurar ciertos detalles y obtener resultados para su posterior análisis.

Sin embargo, un problema grave sigue afectando al código actual. Tiende a subestimar la eficiencia debido a que las pérdidas a pared son excesivas. Esto no parece ser debido al modelo de vaina utilizado sino más bien a las hipótesis realizadas en el modelo de electrones. Dos posibles razones para ello son:

- la anisotropía introducida por el campo magnético en los electrones no es tenida en cuenta en el tensor de presiones que se considera isótropo para los electrones.
- la ley de equilibrio de Maxwell-Boltzmann no es del todo adecuada.

Por tanto aún quedan aspectos a mejorar pero la metodología aquí presentada abre el camino a nuevos modelos, más precisos y que logren reproducir adecuadamente los resultados experimentales.

Por otro lado, el modelo expuesto en este proyecto se ha logrado implementar con éxito a partir de la versión anterior de HPHall-2 lo cual posibilita continuar el proceso de mejora sin necesidad de re-implementar los algoritmos.

## 8.1. Objetivos alcanzados

La mayoría de objetivos propuestos en el momento de plantear el proyecto y los que han surgido durante el transcurso mismo han sido alcanzados de manera altamente satisfactoria. Entre los mismos, cabe destacar:

- Mejoras en el tratamiento de las mallas, permitiendo el tratamiento correcto de prácticamente cualquier geometría, incluso en el canal con las posibilidades que ello ofrece para estudiar efectos como el sputtering.
- Correcto tratamiento de la información proveniente del campo magnético calculado por Maxwell. Obtención de la malla magnética de forma adecuada.
- Mejora del tratamiento de la ionización en el método PIC para incrementar la eficiencia computacional del código.
- Desarrollo de un nuevo modelo de electrones con el consiguiente aumento de consistencia, precisión y velocidad en el código. Tratamiento adecuado de la zona cercana al ánodo.
- Desarrollo de nuevos modelos para las paredes, más consistentes y eficientes que los preexistentes.
- Desarrollo del modelo de electrodo activo para motores de doble etapa.
- Obtención de resultados del código comprobando la consistencia y coherencia de los mismos con la física asociada y con resultados experimentales de la bibliografía. Obtención y análisis de resultados de carácter temporal, secuencias unidimensionales, bidimensionales y movimiento de partículas.
- Tratamiento adecuado de los iones dobles tratándolos como una especie diferente de forma que se pueden caracterizar adecuadamente motores de alto impulso específico.
- Simplificación de la estructura del código para una fácil comprensión por parte de futuros usuarios.

## 8.2. Programa de futuras mejoras del código

Aunque se ha realizado un fuerte desarrollo del código para tratar de alcanzar todo su potencial, aún quedan una serie de futuras mejoras por realizar. Algunas de ellas, por falta de tiempo, no se han implementado aún o bien están en proceso de validación.

- Desarrollo de un modelo de cálculo de erosión de pared para estudio del sputtering que permite evaluar de una forma adecuada la vida útil de un motor cualquiera así como la evolución de los parámetros que describen su funcionamiento como puedan ser la eficiencia, el empuje, etc.
- Implementación de un método PIC más preciso como se explica en el capítulo 4. En los balances de energía realizados para la validación del código se han observado pequeños errores en las especies modeladas como partículas. En particular los errores asociados a los iones son mayores que los errores producidos en el código de electrones. Dichos errores en el balance energético de iones son aún así pequeños pero, para mantener la consistencia del conjunto, es necesario que se aproximen a los errores producidos con el modelo de electrones.
- Estudio de motores de doble etapa: una vez desarrollado el modelo de electrodo activo y adecuado el modelo de electrones para ello, sólo queda realizar la validación y hacer un estudio completo sobre resultados y análisis paramétricos en este tipo de motores.
- Sustitución de la ley de equilibrio de Boltzmann a lo largo de las líneas de campo magnético por otras leyes más adecuadas producto de análisis radiales más rigurosos.
- Obtención de resultados con hipótesis sobre la temperatura de electrones a lo largo de las líneas de campo menos restrictivas. Por ejemplo, una ley adiabática como la propuesta en [35] no conllevaría demasiadas modificaciones en el código actual.
- Modelo de dos temperaturas de electrones: debido a la fuerte anisotropía inducida en los electrones por el campo magnético puede resultar interesante utilizar un modelo de dos temperaturas, una según la dirección de campo y otra según la dirección perpendicular.

Ello obligaría a la utilización de funciones de distribución bimaxwellianas pero permitiría aumentar la precisión del modelo.

- Corrección del método de pesado en las paredes: Uso de mallas refinadas en las paredes para evitar el forzado de la condición de Bohm, o al menos mejorar esta técnica para que no sea tan intrusivo. Actualmente se está planteando el uso de pesados superficiales que permiten obtener resultados semejantes a los obtenidos con el forzado de Bohm sin ser un método intrusivo.
- Comparación con otros códigos para evaluar posibles cambios así como para comprobar el potencial del código actual. En particular la comparación con el modelo unidimensional de Ahedo *et al.* todavía queda pendiente y de ella se espera obtener algunas conclusiones.
- Implementación de métodos de disgregación de macro-partículas de manera que la masa de cada macro-partícula sea un fiel reflejo de la densidad de la zona en la que se encuentra. Esto permitiría la utilización de mallas refinadas en las paredes sin necesidad de aumentar en exceso el tiempo de computación.

# Bibliografía

- [1] E. Ahedo, P. Martínez-Cerezo, M. Martínez-Sánchez. *One-dimensional model of the plasma flow in a Hall thruster*. Physics of plasmas 8, 3058(2001).
- [2] E. Ahedo *Radial macroscopic model of a plasma flowing along annular dielectric walls*. Physics of plasmas 9, 3178(2002).
- [3] E. Ahedo, J. M. Gallardo, M. Martínez-Sánchez. *Model of the plasma discharge in a Hall thruster with heat conduction*. Physics of plasmas 9, 4061(2002).
- [4] E. Ahedo *Presheath/sheath model with secondary electron emission from two parallel walls*. Physics of plasmas 9, 4340(2002).
- [5] E. Ahedo, J. M. Gallardo, M. Martínez-Sánchez. *Effects of the radial plasma-wall interaction on the Hall thruster discharge*. Physics of plasmas 10, 3397(2003).
- [6] E. Ahedo, D. Escobar. *Influence of design and operation parameters on Hall thruster performances*. Journal of applied physics 96, 983 (2004).
- [7] R. R. Hofer, A. D. Gallimore. *Efficiency analysis of a High-Specific Impulse Hall Thruster*. 40th Joint Propulsion Conference, Ft. Lauderdale (Florida 2004)
- [8] F. I. Parra, E. Ahedo, M. Martínez-Sánchez, J. M. Fife. *Improvement of the plasma wall model on a fluid-PIC code of a Hall thruster*. International electric propulsion conference (IEPC, 2004).
- [9] F. I. Parra, E. Ahedo. *Fulfillment of the Bohm condition on the HPHall fluid-PIC code*. 40th Joint Propulsion Conference, Ft. Lauderdale (Florida 2004)

- [10] K. L. Cartwright and J. P. Verboncoeur and C. K. Birdsall. *Loading and Injection of Maxwellian Distributions in Particle Simulations*.  
Journal of Computational Physics 162, 483 (2000).
- [11] J. M. Fife and M. Martínez-Sánchez and J. Szabo. *A Numerical Study of Low-Frequency Discharge Oscillations in Hall Thrusters*.  
33rd AIAA/ASMA/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference, Seattle, Washington (1997).
- [12] J. P. Verboncoeur. *Symmetric Spline Weighting for Charge and Current Density in Particle Simulation*. Journal of Computational Physics 174, 421 (2001).
- [13] M. Celik and M. Santi and S. Cheng and M. Martínez-Sánchez and J. Peraire. *Hybrid-PIC Simulation of a Hall Thruster Plume on an Unstructured Grid with DSMC Collisions*.  
International Electric Propulsion Conference (2003)(IEPC-03-134).
- [14] L. Dorf, Y. Raitses, N.J. Fisch. *Effect of anode dielectric coating on Hall thruster operation*. Applied Physics Letters 84, 1070 (2004).
- [15] J. J. Szabo, M. Martínez-Sánchez, J. Monheiser. *Application of 2-D Hybrid-PIC code to alternative Hall Thruster Geometries*.
- [16] G. J. M. Hagelaar and G. M. W. Kroesen. *Speeding up fluid models for gas discharges by implicit treatment of the electron energy source term*.  
Journal of Computational physics 159, 1 (2000).
- [17] G. J. M. Hagelaar and J. Bareilles and L. Garrigues and J.-P. Boeuf. *Parametric Study of a Stationary Plasma Thruster using Two-Dimensional Hybrid Model*.  
27th International Electric Propulsion Conference, Pasadena, California, USA (2001)(IEPC-01-28).
- [18] G. J. M. Hagelaar and J. Bareilles and L. Garrigues and J.-P. Boeuf. *Two dimensional model of a stationary plasma thruster*. Journal of applied physics 91, 5592 (2002).

- [19] G. J. M. Hagelaar and J. Bareilles and L. Garrigues and J.-P. Boeuf. *Role of anomalous electron transport in a stationary plasma thruster simulation*.  
Journal of Applied Physics 93, 67 (2003).
- [20] J. J. Koo. *Computational model of a SPT-100 thruster*.  
28th International electric propulsion conference (Toulouse, 2003) (IEPC 03-0071).
- [21] J. J. Koo. *Boundary conditions for a 2-D hybrid Stationary Plasma Thruster model*.  
40th Joint Propulsion Conference, Ft. Laurderdale (Florida 2004) (AIAA 2004-3781).
- [22] S. Locke, U. Shumlak, J.M. Fife. *A numerical study of the effect of channel insulator discontinuity on Hall thruster discharge*.  
27th International Electric Propulsion Conference, Pasadena(CA) (2001) (IEPC-01-23).
- [23] V. V. Zhurin, H. R. Kaufman, R. S. Robinson. *Physics of closed drift thrusters*.  
Plasma sources Sci. Technology 8, R1-R20 (1999).
- [24] I. D. Boyd, J. T. Yim. *Modeling of the near field plume of a Hall thruster*.  
Journal of applied physics 95, 4575 (2004).
- [25] C. A. Lentz. *Transient One Dimensional Numerical Simulation of Hall Thruster*.  
S. M. Thesis, Massachusetts Institute of Technology (1993).
- [26] J. M. Fife. *Two-Dimensional Hybrid Particle-In-Cell Modeling of Hall Thrusters*.  
S. M. Thesis, Massachusetts Institute of Technology (1995).
- [27] F. I. Parra. *Actualización y mejora de un código PIC-fluido bidimensional para el flujo de plasma en motores de efecto Hall*. Proyecto fin de carrera, ETSI Aeronáuticos, 2004.
- [28] J. M. Fife. *Hybrid-PIC Modeling and Electrostatic Probe Survey of Hall Thrusters*.  
PhD. thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1998.
- [29] C. K. Birdsall and A. B. Langdon. *Plasma Physics via Computer Simulation*.  
IOP Publishing Ltd. (1991).

- [30] F. Chen . *Introduction to plasma physics and Controlled Fusion*.  
Plenum press, New York (1984).
- [31] R. J. Goldstein, P. H. Rutherford. *Introduction to plasma physics*.  
Institute of Physics Publising (Bristol and Philadelphia).
- [32] J. A. Bittencourt. *Fundamentals of plasma physics*. Pergamon Press.
- [33] Y. Raitses, D. Staack, A. Smirnov, A. A. Litvak, L. A. Dorf, T. Graves, N. J. Fisch.  
*Studies of non-conventional configuration closed electron drift thrusters*.  
37th Joint Propulsion Conference (2001).
- [34] Y. Raitses, A. A. Litvak, L. A. Dorf, N. J. Fisch. *Parametric investigations of segmented electrode Hall thruster*.  
26th International Electric Propulsion Conference (1999) (IEPC-99-245).
- [35] M. M. Santi. *Hall thruster plume simulation using a hybrid-PIC algortihm*.  
S. M. Thesis, Massachusetts Institute of Technology (2003).
- [36] J. V. Dugan and R. J. Sovie. *Volume Ion Production Costs in Tenous Plasmas: A General Atom Theory and Detailed Results for Helium, Argon and Cesium*.  
NASA TN D-4150.
- [37] M. Mitchner and C. K. Krueger. *Partially Ionized Gases*.  
John Wiley & Sons, New York (1973).
- [38] G. S. Janes, R. S. Lowder.  
*Anomalous electron diffusion and ion acceleration in a low-density plasma*.  
Physics of fluids 9, 1115 (1966).
- [39] S. Yoshikawa, D. J. Rose. *Anomalous diffusion of a plasma across a magnetic field*.  
Physics of fluids 5, 334 (1962).
- [40] A. I. Morozov and V. V. Savelyev. *The Electron Dynamics in SPT-Channel and the Problem of Anomalous Erosion*.  
Proceedings of International Electric Propulsion Conference (1995).



- [41] A. I. Bugrova and A. I. Morozov and V. K. Kharchevnikov. *Probe Measurements of Drift Current in a Hall Accelerator*.  
Sov. Phys. – Tech. Phys. 30, 610 (1985).
- [42] E. Ahedo, F. I. Parra. *A model of the two-stage Hall thruster discharge*.  
Journal of applied physics 98, 023303 (2005).
- [43] J.R. Reitz, F.J. Milford, R.W.Christy. *Fundamentos de la Teoría Electromagnética*  
Addison Wesley, Wilmington, Delaware, U.S.A. (1996).
- [44] O. Dumazert, P. Dumazert, S.D. Clark, D.H. Mundy, F. Darnon. *Stretching the operational envelope of the PPS X000 plasma thruster*  
40th Joint Propulsion Conference, Ft. Lauderdale (Florida 2004).
- [45] L. Garrigues, G. J. M. Hagelaar, J. Bareilles, C. Boniface and J.-P. Boeuf. *Model study of the influence of the magnetic field configuration on the performance and lifetime of a Hall thruster*  
Physics of plasmas, volume 10, number 12, 4886(2003).
- [46] E. Ahedo and J.M. Gallardo. *Scaling Down Hall Thrusters*.  
28th International electric propulsion conference (Toulouse, 2003) (IEPC-2003-104).
- [47] V. Khayms and M. Martínez-Sánchez. *Fifty-Watt Hall Thruster for microsatellites*.  
Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts, AIAA 2000.
- [48] D. Mathur and C. Badrinathan. *Ionization of xenon by electrons: Partial cross sections for single, double and triple ionization*.  
Physical Review A 35, 1033 (1987).
- [49] V. Vahedi and M. Surendra. *A Monte Carlo collision model for the particle-in-cell method: applications to argon and oxygen discharges*.  
Computer Physics Communications. vol 87 179–198 1995
- [50] D. M. Brenizer. *Hybrid-PIC Modeling of Hall Thrusters Plume*.  
Massachusetts Institute of Technology, S. M. Thesis 2000

- [51] C. A. Lentz. *Transient One Dimensional Numerical Simulation of Hall Thruster*. Massachusetts Institute of Technology. S. M. Thesis 1993
- [52] J. M. Gallardo, F. I. Parra. *Propulsión eléctrica espacial: Desarrollo de un motor de plasma de efecto Hall*. E.T.S.I. Aeronáuticos (2002).
- [53] E. Ahedo *On the near-anode region of the Hall thruster discharge*. 40th Joint Propulsion Conference, Ft. Lauderdale (Florida 2004).
- [54] L. Dorf, V. Semenov, Y. Raytses, N. J. Fisch. *Hall thruster modelling with a given temperature profile*. 38th Joint Propulsion Conference (Indianápolis 2002).
- [55] S. Roy, B. P. Pandey. *Modelling the effect of plasma-wall interaction in a Hall thruster*. 38th Joint Propulsion Conference (Indianápolis 2002).
- [56] G. P. Sutton, O. Biblarz. *Rocket Propulsion Elements, 7th edition*. John Wiley & Sons (2001).
- [57] D. Escobar, A.M. Antón. *Desarrollo de un código híbrido PIC-fluido para simulación de motores de efecto Hall*. E.T.S.I. Aeronáuticos (2005).
- [58] S. Barral, K. Makowsky, Z. Peradzynski, N. Gascon, M. Dudeck. *Wall material effects in stationary plasma thrusters. II. Near-wall and in-wall conductivity*. E.T.S.I. Aeronáuticos (2005).
- [59] R. R. Hofer. *Development and characterization of high-efficiency, high specific impulse Xenon Hall Thrusters*. PhD. thesis, University of Michigan, 2004.